Πιθανότητες ΙΙ

Τελική Εξέταση, 1 Αυγούστου 2014

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας.

(α) Θέτουμε $\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}(A) = 0 \text{ ή } \mathbf{P}(A) = 1\}$. Να δειχθεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα.

(β) Θέτουμε $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}(A) = 0\}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{C}$ δεν είναι σ-άλγεβρα. Ποιά είναι η σ-άλγεβρα, $\sigma(\mathcal{C})$, που παράγεται από την $\mathcal{C}$;

Θέμα 2. (30 Βαθμοί) Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία αριθμών στο $(0,1)$ και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = a_n, \mathbf{P}(X_n = a_n) = 1 - a_n$$

για κάθε $n \geq 1$ (δηλαδή η X_n παίρνει ή την τιμή a_n ή την τιμή 1). Θεωρούμε την (τυχαία) άπειρη σειρά $S = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

(α) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$.

(β) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(S = \infty) = 1$.

(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της S, και να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(S) < \infty$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Θέμα 3 (25 Βαθμοί) **(α)** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{αν } x \in (0,1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus(0,1). \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει $\mathbf{P}(X_1 > t) = 1 - \sqrt{t}$.

(β) Θέτουμε $A_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι $n^2 A_n \Rightarrow Y$ καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή), όπου Y είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Θέμα 4. (30 Βαθμοί) **(α)** Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mu := \mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $a \in (0,\infty)$ ισχύει

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Έστω και ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Θέτουμε $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{S_n}{a_n\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$$

καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά πιθανότητα).

(γ) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ και S_n όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > \sqrt{n}).$$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

1. (β) Η $\mathcal{C}$ δεν είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Ισχύει $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$, όπου $\mathcal{F}$ είναι η σ-άλγεβρα του ερωτήματος (α).

2. Έστω $A_n := \{X_n = 1\}$ για κάθε $n \geq 1$. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(α) Από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli, με πιθανότητα 1, ισχύει $X_n = 1$ για πεπερασμένα n. Για τα υπόλοιπα n ισχύει $X_n = a_n$. Και επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (από υπόθεση), θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

(β) Από δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli, με πιθανότητα 1, ισχύει $X_n = 1$ για άπειρα n. Δηλαδή (σχεδόν για όλα τα ω στο Ω) στη σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ εμφανίζεται άπειρες φορές το 1. Άρα η σειρά απειρίζεται.

(γ) Από το Θεώρημα Beppo-Levi,

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \times 1 + (1 - a_n) a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2 - a_n).$$

Επειδή οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2 - a_n)$ έχουν θετικούς όρους και (αφού $a_n \in (0,1)$)

$$a_n \leq a_n(2 - a_n) \leq 2a_n,$$

το ζητούμενο έπεται.

3. (β) Έστω $x > 0$. Για $n > \sqrt{x}$, χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), έχουμε

$$\mathbf{P}(n^2 A_n \leq x) = 1 - \mathbf{P}(n^2 A_n > x) = 1 - \mathbf{P}(X_1 > x/n^2)^n = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n.$$

Για $n \to \infty$ η τελευταία ποσότητα συγκλίνει στο $1 - e^{-\sqrt{x}}$. Για $x \leq 0$, έχουμε $\mathbf{P}(n^2 A_n \leq x) = 0$.

4. (α) Θεωρία.

(β) Για $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα και το ότι $\mathbf{E}(S_n) = 0, \mathrm{Var}(S_n) = n \,\mathrm{Var}(X_1)$, έχουμε

$$\mathbf{P}\left(\left| \frac{S_n}{a_n \sqrt{n}} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{a_n^2 n} = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{a_n^2}.$$

Το τελευταίο πηλίκο τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$.

(γ) Εφαρμόζουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Το όριο ισούται με $1 - \Phi(1)$.