Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 12 Σεπτεμβρίου 2022

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία μετρήσιμων συνόλων σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
(α) Πώς ορίζεται το $\liminf_{n\geqslant 1} A_n$ και πώς περιγράφεται με λόγια;
(β) Ποια ανισότητα συνδέει τους αριθμούς $\mathbf{P}(\liminf_{n\geqslant 1} A_n), \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$; Να αποδειχθεί η ανισότητα και να δοθεί παράδειγμα που οι δύο αυτοί αριθμοί είναι άνισοι.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ τυχαίες μεταβλητές στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, και $C_\infty := \cap_{n=1}^\infty \sigma(\{X_k : k \geqslant n\})$ η τελική σ-άλγεβρά τους. Ποιες από τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές είναι C_∞-μετρήσιμες;
(α) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/\log n$,
(β) $\sup\{X_n \wedge 1 : n \in \mathbb{N}^+\}$,
(γ) $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$.

3. (25 Βαθμοί) Εστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$.
(α) Ποια η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_1;
(β) Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(X_1 X_2 \cdots X_n), \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{X_1 X_2 + X_3 X_4 + \cdots + X_{2n-1} X_{2n}}.$$

(γ) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_1 + X_2 \cdots + X_n > n/2).$$

4. (20 Βαθμοί) Ένας φοιτητής απαντάει τις ερωτήσεις μιας εξέτασης, οι οποίες είναι άπειρες και αριθμημένες ως $1, 2, 3, \ldots$ Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά την ερώτηση n είναι $1/n$ (οι ερωτήσεις είναι με σειρά αύξουσας δυσκολίας), και τα ενδεχόμενα $(\{\text{απαντάει σωστά την ερώτηση } n\})_{n\in\mathbb{N}^+}$ είναι ανεξάρτητα.
(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 θα απαντήσει σωστά άπειρες ερωτήσεις.
(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 μόνο πεπερασμένο αριθμό φορών θα καταφέρει να απαντήσει σωστά δύο διαδοχικές ερωτήσεις.

5. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$M_{X_n}(t) := \mathbf{E}(e^{tX_n}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{t^2/2} + \frac{1}{n} e^{tn}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $t \in \mathbb{R}$.
(α) Να προσδιοριστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_n.
(β) Να δειχθεί ότι $X_n \Rightarrow X$ με $X \sim N(0, 1)$.
(γ) Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = 1$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^2) = \infty$. Παραβιάζεται το θεώρημα που λέει ότι $\mathbf{E}\{g(X_n)\} \to \mathbf{E}\{g(X)\}$ για αρκετές g, που ισχύει λόγω του (β);

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**