Πιθανότητες ΙΙ

20 Σεπτεμβρίου 2021

1. (15 Βαθμοί) Έστω X μη κενό σύνολο, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία συναρτήσεων με $f_n : X \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και $a \in \mathbb{R}$ δεδομένο. Για τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, να εξεταστεί αν μεταξύ τους ισχύει πάντα κάποια από τις σχέσεις $\subset, =, \supset$. Όπου ισχύει, δώστε απόδειξη, όπου δεν ισχύει γενικά, δώστε αντιπαράδειγμα.
(α) $\{x \in X : \varliminf f_n(x) > a\}, \liminf\{x \in X : f_n(x) > a\}$,
(β) $\{x \in X : \varliminf f_n(x) \leqslant a\}, \limsup\{x \in X : f_n(x) \leqslant a\}$,
(γ) $\{x \in X : \varliminf f_n(x) \geqslant a\}, \limsup\{x \in X : f_n(x) \geqslant a\}$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή.
(α) Πώς ορίζεται η συνάρτηση κατανομής, F, της X;
(β) Να δειχθεί ότι η F έχει τις εξής ιδιότητες: είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

3. (30 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{x\geqslant 1}$.
(α) Να δειχθεί ότι $X_n/n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(\{X_n \geqslant n \text{ για άπειρα } n\}) = 1$.
(γ) Να υπολογιστούν τα όρια $\varlimsup_{n\to\infty} X_n/n, \varliminf_{n\to\infty} X_n/n$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X \wedge k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X \geqslant j).$$

5. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών όπως στην άσκηση 3 πιο πάνω. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} X_1X_2\cdots X_n = \infty$ με πιθανότητα 1.

6. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Γνωρίζουμε ότι για τη χαρακτηριστική συνάρτηση, ϕ, της X_1 ισχύει

$$\phi(t) = 1 - i\frac{2}{\pi}t \log|t| + g(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει $C \in (0, \infty)$ ώστε $|g(t)| \leqslant C|t|$ για κάθε $t \in (-1, 1)$. Θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.
(α) Προσδιορίστε ακολουθία σταθερών $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ώστε η ακολουθία $(S_n/c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ να συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Y με τιμές στο $(0, \infty)$.
(β) Ποια είναι η κατανομή της Y; Συγκλίνει η S_n/c_n στην Y με κάποιο άλλο τρόπο σύγκλισης;

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!