Πιθανότητες ΙΙ

Τελική εξέταση. 21 Σεπτεμβρίου 2020

1. (15 Βαθμοί) Στον χώρο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τις οικογένειες υποσυνόλων

$$\mathcal{A}_1 := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}.$$

Να δειχθεί ότι $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{x} & \text{αν } x \in [0,1), \\ \frac{1}{2}x & \text{αν } x \in (1,2). \end{cases}$$

(α) Να προσδιοριστούν οι τιμές $F(-1), F(1), F(3)$.
(β) Να προσδιοριστούν οι πιθανότητες $\mathbf{P}(X < 1), \mathbf{P}(X = 1), \mathbf{P}(0.25 < X < 1.5)$.

3. (20 Βαθμοί) (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson(λ), όπου $\lambda \in (0, \infty)$ δεδομένη σταθερά. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ η X_n να ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ_n) με $\lambda_n := \cos(1/n)$. Να δειχθεί ότι $X_n \Rightarrow X$ για κάποια τυχαία μεταβλητή X της οποίας η κατανομή να προσδιοριστεί.

4. (30 Βαθμοί) Χαρακτηρίστε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος.
(α) Αν $X_n \to X$ κατά πιθανότητα, τότε $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^1$.
(β) Αν η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές στο $(0, \infty)$, τότε $\lim_{t\to-\infty} M_X(t) = 0$.
(γ) Αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$ τότε $\mathbf{E}|X| < \infty$.
(δ) Αν $\mathbf{E}(X) = 1$, τότε $\mathbf{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1/2$.
(ε) Αν $\mathbf{E}(e^X) < \infty$ και $\mathbf{E}(e^{-X}) < \infty$, τότε $\mathbf{E}|X| < \infty$.
Για τις σωστές δώστε επιχείρημα, για τις λάθος δώστε αντιπαράδειγμα.

5. (30 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με καθεμία να έχει πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{x>1}$. Θέτουμε $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι:
(α) Για κάθε $a > 0$ ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n/n \geqslant a$ με πιθανότητα 1.
(β) $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n/n = \infty$ με πιθανότητα 1.
(γ) $\frac{n}{M_n} \Rightarrow Y$ για κάποια τυχαία μεταβλητή Y. Ποια η κατανομή της Y;

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα.

Καλή επιτυχία!

Υπενθύμιση: Για $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, $M_X(t) := \mathbf{E}(e^{tX}), \phi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απαντήσεις

1.

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(-\infty, a - \frac{1}{n} \Big] \in \sigma(\mathcal{A}_2),$$
$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(-\infty, a + \frac{1}{n} \Big) \in \sigma(\mathcal{A}_1).$$

2. (α) $F(-1) \leqslant F(0) = 0$ αλλά η F παίρνει τιμές στο $[0, 1]$. Άρα $F(-1) = 0$. $F(1) = F(1+) = 1/2$. $F(3) \geqslant F(2) = 1$, άρα $F(3) = 1$ αφού πρέπει να είναι και $\leqslant 1$.
(β) $\mathbf{P}(X < 1) = F(1-) = 1/3, \mathbf{P}(X = 1) = F(1) - F(1-) = 1/2 - 1/3 = 1/6$. $\mathbf{P}(0.25 < X < 1.5) = F(1.5-) - F(0.25) = 3/4 - 1/6 = 7/12$.

4. (α) Λ, (β) Σ, (γ) Σ, (δ) Λ, (ε) Σ.
Στο (δ), η Markov δεν εφαρμόζεται γιατί ενδεχομένως η X να παίρνει αρνητικές τιμές. Εύκολα φτιάχουμε αντιπαράδειγμα.

5. Υπολογίζουμε ότι $\mathbf{P}(X_1 \geqslant t) = \int_t^\infty f(x)\, dx = 1/t$ για κάθε $t \geqslant 1$.
(α) $A_n := \{X_n \geqslant na\}$. Για $n \geqslant 1/a$ ισχύει $\mathbf{P}(A_n) = 1/(an)$ και εφαρμόζουμε το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli.
(β) Έστω $C_a := \{\overline{\lim}\, X_n/n \geqslant a\}$ για κάθε $a > 0$. Τότε $\{\overline{\lim}\, X_n/n = \infty\} = \cap_{k\in\mathbb{N}^+} C_k$. Και επειδή κάθε C_k έχει πιθανότητα 1, έπεται ότι $\mathbf{P}(\{\overline{\lim}\, X_n/n = \infty\}) = 1$.
(γ) Για $x > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(n/M_n \leqslant x) &= \mathbf{P}(M_n \geqslant n/x) = 1 - \mathbf{P}(M_n < n/x) = 1 - \{\mathbf{P}(X_1 < n/x)\}^n \\ &= 1 - \Big\{1 - \frac{x}{n}\Big\}^n \to 1 - e^{-x} \qquad \text{για } n \to \infty.\end{aligned}$$

Για $x \leqslant 0$, έχουμε $\mathbf{P}(n/M_n \leqslant x) = 0$. Η $(1 - e^{-x})\mathbf{1}_{x>0}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο 1.