Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 14 Ιουνίου 2023

1. (10 Βαθμοί) Θεωρούμε τις οικογένειες $\mathcal{A} := \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}, \mathcal{B} := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$ και $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$ (παραγόμενη σ-άλγεβρα στο σύνολο $\mathbb{R}$).

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Δείξτε με χρήση μόνο του ορισμού του μέτρου και την ιδιότητα μονοτονίας του μέτρου ότι για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ισχύει $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

3. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε αυτόν με τιμές στο $[0, \infty)$ (δηλαδή $X_n : \Omega \to [0, \infty)$ για κάθε $n \geq 1$). Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρήσιμες ως προς την τελική σ-άλγεβρα που παράγει η ακολουθία;
[Υπενθύμιση: Η εν λόγω σ-άλγεβρα είναι η $\cap_{n=1}^{\infty} \sigma(\{X_k : k \geq n+1\})$.]
(α) $\overline{\lim}_{n\to\infty} nX_n$.
(β) $\underline{\lim}_{n\to\infty} (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/\log n$.
(γ) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \max\{X_1 - n, X_2 - (n-1), \cdots, X_n - 1\}$.
(δ) $\lim_{n\to\infty} \max\{X_1 - 1, X_2 - 2, \cdots, X_n - n\}$.

4. (20 Βαθμοί) Εστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η X_1 έχει συνάρτηση κατανομής $F(x) = (1 - x^{-2})\mathbf{1}_{x\geq 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:
(α) Με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}\, X_n/\sqrt{n} = \infty$.
(β) Με πιθανότητα 1 ισχύει $\lim_{n\to\infty} X_n/n = 0$.

5. (20 Βαθμοί) Εστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, I σύνολο, και $(X_t)_{t\in I}$ τυχαίες μεταβλητές στον Ω και με πραγματικές τιμές (δηλαδή $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ για κάθε $t \in I$).
(α) Πότε λέμε ότι η οικογένεια $(X_t)_{t\in I}$ είναι σφιχτή;
(β) Να δειχθεί ότι αν η $(X_t)_{t\in I}$ είναι σφιχτή, τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) := \inf_{t\in I} \mathbf{P}(X_t \leq x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$.

6. (15 Βαθμοί) Εστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0, \infty)$. Για τη χαρακτηριστική συνάρτηση, ϕ, της X_1 γνωρίζουμε ότι

$$\phi(t) = 1 - i\frac{2}{\pi}t\log|t| + g(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με $\overline{\lim}_{t\to 0} |g(t)/t| < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{S_n}{n\log n} \Rightarrow \frac{2}{\pi}.$$

Στο δεξί μέλος έχουμε τη σταθερή τυχαία μεταβλητή $2/\pi$, ενώ $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

7. (20 Βαθμοί) Εστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0, \infty)$. Για τη συνάρτηση κατανομής, F, της X_1 γνωρίζουμε ότι $F(x) = 1 - (1/3)e^{-x^2}$ για κάθε $x > 0$.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα $\mathbf{P}(X_1 = 0)$;
(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η ακολουθία $m_n := \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, n \in \mathbb{N}^+$ συγκλίνει και προσδιορίστε το όριό της.
(γ) Θέτουμε $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών $(a_n)_{n\geq 1}$ ώστε

$$a_n(M_n - a_n) \Rightarrow Y$$

για μια μη σταθερή τυχαία μεταβλητή Y που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Προσδιορίστε μια τέτοια ακολουθία a_n και τη συνάρτηση κατανομής της Y.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.
Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

3. Οι (α), (β), (γ) είναι. Η (δ) δεν είναι στη γενική περίπτωση. Στο (δ), το όριο υπάρχει γιατί η ακολουθία είναι αύξουσα, αλλά το όριο ενδέχεται να εξαρτάται από την τιμή της X_1 (και οποιασδήποτε X_r)

4. (α) Εφαρμόζουμε το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli.
(β) Εφαρμόζουμε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.

5. Για την F δείχνουμε ότι (α) είναι αύξουσα (εύκολο), (β) είναι δεξιά συνεχής (άσκηση απειροστικού, θέλει προσοχή), (γ) $F(-\infty) = 0$ (εύκολο), (δ) $F(\infty) = 1$ (εδώ χρησιμοποιούμε τη σφιχτότητα).

6. Έστω $r_n := n \log n$ για $n \in \mathbb{N}^+$. Για $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ έχουμε

$$\phi_{S_n/r_n}(t) = \phi(t/r_n)^n = \left(1 + \frac{n(\phi(t/r_n) - 1)}{n}\right)^n.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} n(\phi(t/r_n) - 1) &= -ni\frac{2}{\pi}\frac{t}{n\log n}\log\frac{|t|}{n\log n} + ng\Big(\frac{t}{n\log n}\Big) \\ &= -\frac{2i}{\pi}\frac{t\log|t|}{\log n} + \frac{2i}{\pi}\frac{t(\log n + \log\log n)}{\log n} + \frac{1}{\log n}\frac{n\log n}{t}g\Big(\frac{t}{n\log n}\Big) \overset{n\to\infty}{\to} i\frac{2}{\pi}t \end{aligned}$$

Κατά τα γνωστά,

$$\lim_{n\to\infty}\phi_{S_n/r_n}(t) = e^{i\frac{2}{\pi}t}.$$

Το δεξί μέλος είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της σταθερής τυχαίας μεταβλητής $2/\pi$, και το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα συνέχειας του Levy.

7. (α) $\mathbf{P}(X_1 = 0) = F(0) - F(0-) = 2/3$. Έχουμε $F(0-) = 0$ γιατί η X_1 παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$.
(β) Με χρήση του δεύτερου λήμματος Borel-Cantelli, ή και πιο απλά, δείχνουμε ότι με πιθανότητα 1 υπάρχει (τυχαίος) δείκτης $n_0(\omega)$ με $X_{n_0} = 0$. Άρα το όριο είναι 0.
(γ) Θα επιδιώξουμε να βρούμε μία $(a_n)_{n\geq 1}$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε[1] $a_n + (x/a_n) > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a_n(M_n - a_n) \leq x) &= \mathbf{P}\Big(M_n \leq a_n + \frac{x}{a_n}\Big) = \mathbf{P}\Big(X_1 \leq a_n + \frac{x}{a_n}\Big)^n = \Big(1 - \frac{1}{3}e^{-(a_n + \frac{x}{a_n})^2}\Big)^n \\ &= \Big(1 - \frac{1}{n}\frac{1}{3}ne^{-a_n^2}e^{-x^2/a_n^2}e^{-2x}\Big)^n. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση γίνεται φανερό ποια είναι μια καλή επιλογή για την a_n. Ζητούμε $ne^{-a_n^2} = 1$, δηλαδή $a_n = \sqrt{\log n}$. Αυτή η a_n έχει όριο ∞, όπως υποθέσαμε στον παραπάνω υπολογισμό. Τότε για όλα τα μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathbf{P}(a_n(M_n - a_n) \leq x) = \Big(1 - \frac{1}{n}\frac{1}{3}e^{-2x}e^{-x^2/a_n^2}\Big)^n \overset{n\to\infty}{\to} e^{-\frac{1}{3}e^{-2x}}.$$

Το δεξί μέλος είναι μια συνάρτηση, έστω $G(x)$, που έχει τις ιδιότητες συνάρτησης κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής. Επομένως, υπάρχει τυχαία μεταβλητή Y με συνάρτηση κατανομής G και $a_n(M_n - a_n) \Rightarrow Y$ καθώς $n \to \infty$.

[1] Με εξαίρεση ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $n \in \mathbb{N}$, όλα τα υπόλοιπα $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιούν αυτή την ανισότητα γιατί υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.