Πιθανότητες ΙΙ

Τελική εξέταση. 16 Ιουνίου 2022

1. (25 Βαθμοί) Έστω X, Y μη κενά σύνολα και $f : X \to Y$ συνάρτηση.
(α) Αν $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y, δείξτε ότι το σύνολο

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X.
(β) Αν C είναι οικογένεια υποσυνόλων του Y (δηλαδή $C \subset \mathcal{P}(Y)$), τότε

$$\sigma(f^{-1}(C)) = f^{-1}(\sigma(C)).$$

[Θεωρήστε δεδομένο το εξής: Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X, τότε το σύνολο $\{B : B \subset Y$ και $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y.]

2. (15 Βαθμοί) Αν μ είναι μέτρο σε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$, να δειχθεί ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$ με $\mu(A), \mu(B) < \infty$ ισχύει

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \triangle B).$$

Υπενθυμίζεται ότι $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

3. (20 Βαθμοί) Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ είναι πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to (0, \infty)$ και $\mu := \mathbf{E}(X) < \infty$. Δείξτε ότι η $h : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ με

$$h(x, y) := \frac{1}{\mu} f(x + y) \mathbf{1}_{[0,\infty)^2}(x, y)$$

έχει

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty h(x, y) dx dy = 1.$$

[Και άρα είναι πυκνότητα στο $\mathbb{R}^2$.]

4. (30 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που για $n \geqslant 2$ έχουν την εξής κατανομή.

$$X_n = \begin{cases} -n & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4n^2}, \\ -1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4n}, \\ 1 & \text{με πιθανότητα } 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2}, \\ n & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4n}. \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η πιθανότητα των εξής ενδεχομένων

$$\{X_n = -n \text{ για άπειρα } n\}, \{X_n = -1 \text{ για άπειρα } n\};$$

(β) Να προσδιοριστεί σε ένα σύνολο με πιθανότητα 1 η τιμή των ορίων

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}, \varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}.$$

(γ) Να δειχθεί ότι η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μια τυχαία μεταβλητή X την οποία και να προσδιορίσετε.

5. (10 Βαθμοί) Ένα πείραμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p. Εκτελούμε ακολουθία ανεξάρτητων πραγματοποιήσεών του και ονομάζουμε X το πλήθος αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

6. (15 Βαθμοί) Έστω $a \in (0, \infty)$ και $n > a$ φυσικός. Θεωρούμε ακολουθία ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων του πειράματος από το προηγούμενο θέμα, όπου υποθέτουμε ότι $p = 1 - (a/n)$. Έστω Y_n το πλήθος των αποτυχιών μέχρι τη n-οστή επιτυχία. Να δειχθεί ότι για $n \to \infty$ η Y_n συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Y της οποίας την κατανομή να προσδιορίσετε. [Υπόδειξη: Γράψτε την Y_n ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών της μορφής της προηγούμενης άσκησης.]

Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των κατανομών $N(0,1)$, Poisson(λ), exp(λ) είναι

$$e^{-t^2/2}, e^{\lambda(e^{it}-1)}, \lambda/(\lambda - it)$$

αντίστοιχα.

Απαντήστε σε 5 από τα 6 θέματα.
Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) Αποδεικνύεται όπως η άσκηση 1.7 (α) στις σημειώσεις.
(β) Επειδή $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ και με βάση το (α) η $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται από τον ορισμό της παραγόμενης σ-άλγεβρας ότι $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θέτουμε

$$\mathcal{G} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}.$$

Προφανώς $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, και εφαρμόζοντας το δεδομένο της άσκησης για $\mathcal{A} := \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})$, έχουμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα. Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$, άρα $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

2. Η ζητούμενη ισοδυναμεί με την

$$-\mu(A \triangle B) \leqslant \mu(A) - \mu(B) \leqslant \mu(A \triangle B)$$

που επειδή $\mu(A), \mu(B) < \infty$, ισοδυναμεί με το να ισχύουν οι εξής δύο ανισότητες

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leqslant \mu(B) + \mu(A \triangle B) \\ \mu(B) &\leqslant \mu(A) + \mu(A \triangle B) \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε την πρώτη. Επειδή $A \subset B \cup (A \backslash B)$ και τα $B, A \backslash B$ είναι ξένα έχουμε

$$\mu(A) \leqslant \mu(B \cup (A \backslash B)) = \mu(B) + \mu(A \backslash B) \leqslant \mu(B) + \mu(A \triangle B).$$

3. Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα (όπου το y είναι σταθερό, το βλέπουμε ως παράμετρο) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $z := x + y$. Οπότε

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x+y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_y^\infty f(z)\, dz\, dy = \int_0^\infty \mathbf{P}(X \geqslant y)\, dy = \mu$$

Η τελευταία ισότητα είναι γνωστή από τη θεωρία. Διαιρώντας με μ τις πιο πάνω ισότητες, έχουμε το ζητούμενο.

4. (γ) Θέτουμε $X(\omega) = 1$ για κάθε ω στον χώρο πιθανότητας. Τότε $X_n \to X$ κατά πιθανότητα γιατί για $\varepsilon > 0$ και $n \geqslant 2$ έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(X_n \in \{-n, -1, n\}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

5. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με

$$f(a) := \mathbf{P}(X = a) = \begin{cases} (1-p)^a p & \text{αν } a \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \\ 0 & \text{αν } a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}. \end{cases}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι

$$\phi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^\infty e^{itk}(1-p)^k p = p \sum_{k=0}^\infty (e^{it}(1-p))^k = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

6. Έστω X_1 το πλήθος των αποτυχιών ως την πρώτη επιτυχία και για $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ έστω X_i το πλήθος των αποτυχιών από την $i-1$ ως την i επιτυχία. Οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες, καθεμία με κατανομή την ίδια με της X του θέματος 5 με $p = 1 - (a/n)$, και

$$Y_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y_n είναι

$$\phi_{Y_n}(t) = (\phi_{X_1}(t))^n = \frac{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{a}{n}e^{it}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{e^{-a}}{e^{-ae^{it}}} = e^{a(e^{it}-1)}.$$

Η $t \mapsto e^{a(e^{it}-1)}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής Poisson(a). Από το θεώρημα συνέχειας του Lévy έπεται ότι $Y_n \Rightarrow Y$ με $Y \sim$ Poisson(a).