Πιθανότητες ΙΙ

Τελική εξέταση. 15 Φεβρουαρίου 2021

1. (15 Βαθμοί) Έστω $X = \{0, 1, 2, 3\}$ και η σ-άλγεβρα

$$\mathcal{A} := \{X, \varnothing, \{0\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

(α) Ορίστε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ μη σταθερή που να είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη.
(β) Ορίστε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που να μην είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) = 1$.
(α) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X|\leqslant n}), \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X|\geqslant n})$.
(β) Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = 0$.
(Προαιρετικό. Δείξτε το ισχυρότερο, $\lim_{n\to\infty} n^2\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = 0$.)

3. (20 Βαθμοί) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $\varepsilon_n := 1/(2n)$. Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών σε κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ώστε

$$X_n = \begin{cases} -\sqrt{n} & \text{με πιθανότητα } \varepsilon_n, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - 2\varepsilon_n, \\ \sqrt{n} & \text{με πιθανότητα } \varepsilon_n \end{cases}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.
(α) Δείξτε ότι $\mathbf{P}(X_n = -\sqrt{n} \text{ για άπειρα } n) = 1$.
(β) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Εξετάστε κατά πόσον η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ συγκλίνει στη X

(i) σχεδόν βέβαια,
(ii) στον $\mathcal{L}^1$,
(iii) στον $\mathcal{L}^2$,
(iv) κατά πιθανότητα.

4. (20 Βαθμοί) Έστω $a > 0$ και $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ώστε $\mathbf{P}(X_1 > x) = x^{-a}$ για κάθε $x > 1$. Θέτουμε $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{M_n/n^{1/a}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Y. Ποια η συνάρτηση κατανομής της Y;

5. (20 Βαθμοί) Έστω $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(q) = F_X(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, τότε $X_n \Rightarrow X$ καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή).

6. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή $N(0, 1)$. Θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}\left(\varliminf_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} = 0\right) = 1.$$

Λύσεις μερικών ερωτημάτων

1. (α) Για παράδειγμα,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0, \\ 0 & \text{αν } x \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

(β) Για παράδειγμα,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 1, \\ 0 & \text{αν } x \in \{0, 2, 3\}. \end{cases}$$

2. (β) $\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \mathbf{P}(X^2 \geqslant n^2) \leqslant \mathbf{E}(X^2)/n^2$ από την ανισότητα Markov. Άρα ...
Το προαιρετικό είναι ουσιαστικά η άσκηση 5.14 των σημειώσεων. Γράφουμε $n^2 \mathbf{1}_{|X| \geqslant n} \leqslant X^2 \mathbf{1}_{|X| \geqslant n}$, άρα

$$n^2 \mathbf{P}(|X| \geqslant n) \leqslant \mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X| \geqslant n}).$$

Το δεξί μέλος τείνει στο μηδέν από το ερώτημα (α) (θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

3. (α) Δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli.
(β) Το σχεδόν βέβαια δεν μπορεί να ισχύει [λόγω του ερωτήματος (α)]. Συγκλίνει στον $\mathcal{L}^1$ άρα και κατά πιθανότητα. Δεν συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2$.

4. Για $x > 0$ και $n > 1/x^a$ (ώστε να έχουμε $xn^{1/a} > 1$) ισχύει

$$\mathbf{P}(M_n/n^{1/a} \leqslant x) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant xn^{1/a})^n = \{1 - \mathbf{P}(X_1 > xn^{1/a})\}^n = \left\{1 - \frac{1}{x^a n}\right\}^n \overset{n\to\infty}{\to} e^{-x^{-a}}.$$

Για $x \leqslant 0$, προφανώς $\mathbf{P}(M_n/n^{1/a} \leqslant x) = 0$. Η συνάρτηση $F(x) = e^{-x^{-a}} \mathbf{1}_{x>0}$ έχει τις ιδιότητες μιας συνάρτησης κατανομής. Άρα υπάρχει τ.μ. Y που να την έχει συνάρτηση κατανομής, και τα πιο πάνω έδειξαν ότι $M_n/n^{1/a} \Rightarrow Y$.

5. Έστω x σημείο συνέχειας της F_X. Για οποιουσδήποτε ρητούς q_1, q_2 με $q_1 < x < q_2$ έχουμε

$$F_X(q_1) = \lim F_{X_n}(q_1) \leqslant \underline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leqslant \overline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leqslant \lim F_{X_n}(q_2) = F_X(q_2)$$

Δηλαδή

$$F_X(q_1) \leqslant \underline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leqslant \overline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leqslant F_X(q_2)$$

Επειδή το x είναι σημείο συνέχειας της F_X, αν πάρουμε $q_1 \to x^-$ με $q \in \mathbb{Q}$ και $q_2 \to x^+$ με $q \in \mathbb{Q}$ θα έχουμε

$$F_X(x) \leqslant \underline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leqslant \overline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x),$$

που είναι το ζητούμενο.

Με την υπόθεση που έχουμε, δεν μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρήστε για παράδειγμα τις τ.μ. $X = \sqrt{2}, X_n = \sqrt{2} - 1/n$ (σταθερές τ.μ.). $F_{X_n}(\sqrt{2}) = 0 \not\to 1 = F_X(\sqrt{2})$.

5. Λύνεται όπως η άσκηση 11.16 των σημειώσεων. Είναι απλοποίηση της άσκησης 16.7 (β).