Πιθανότητες ΙΙ

Τελική εξέταση. 17 Φεβρουαρίου 2020

1. (15 Βαθμοί) Έστω X σύνολο και $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-άλγεβρα.
(α) Τι ονομάζουμε μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$;
(β) Στο σύνολο $X := \mathbb{R}$ θεωρούμε τη σ-άλγεβρα

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \backslash A \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Για $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε $\mu(A) = 0$ αν το A είναι αριθμήσιμο και $\mu(A) = 1$ αν το $\mathbb{R} \backslash A$ είναι αριθμήσιμο. Να δειχθεί ότι η μ είμαι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

2. (15 Βαθμοί) Μια κάλπη περιέχει τη χρονική στιγμή 0 ένα λευκό σφαιρίδιο. Κάθε μία από τις χρονικές στιγμές 1, 2, 3, ..., κάνουμε το εξής: Επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο από την κάλπη και το επιστρέφουμε σε αυτήν μαζί με ένα καινούργιο κόκκινο σφαιρίδιο. Οι τυχαίες επιλογές σφαιριδίων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ποια είναι η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων;
(α) Τη χρονική στιγμή $n \in \mathbb{N}^+$ να επιλεγεί το λευκό σφαιρίδιο.
(β) Άπειρες φορές να επιλεγεί το λευκό σφαιρίδιο.
(γ) Άπειρες φορές να επιλεγεί δυο διαδοχικές φορές το λευκό σφαιρίδιο.

3. (15 Βαθμοί) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $\varepsilon_n := 1/(2n^2)$. Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ώστε

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{με πιθανότητα } \varepsilon_n, \\ 1 & \text{με πιθανότητα } 1 - 2\varepsilon_n, \\ n^2 & \text{με πιθανότητα } \varepsilon_n \end{cases}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(\omega) = 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Εξετάστε κατά πόσον η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ συγκλίνει στην X
(α) κατά πιθανότητα,
(β) στον $\mathcal{L}^1$,
(γ) σχεδόν βέβαια.

4. (15 Βαθμοί) Να υπολογιστούν τα όρια των εξής ποσοτήτων όταν ο φυσικός $n \to \infty$:

(α) $\int_0^1 x^n \sin(nx^2)\, dx$ (β) $\mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X|>n})$ (γ) $\mathbf{E}(Y^2 \mathbf{1}_{|Y| \leqslant n})$

X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathbf{E}(X^2) = 1, \mathbf{E}(Y^2) = \infty$.

5. (15 Βαθμοί) (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson(λ), όπου $\lambda \in (0, \infty)$ δεδομένη σταθερά. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε η $X + Y$ να έχει την κατανομή Poisson(1). Τι κατανομή ακολουθεί καθεμία από τις X, Y;

6. (20 Βαθμοί) Χαρακτηρίστε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος.
(α) Αν $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n| = 0$, τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$ (σύγκλιση κατά πιθανότητα).
(β) Αν $\mathbf{E}X = \infty$, τότε $\mathbf{P}(X = \infty) > 0$.
(γ) Αν $\mathbf{E}X = \infty$ τότε $\mathbf{E}(X^-) < \infty$.
(δ) Αν $\phi_X(t) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.
(ε) Αν $M_X(t) = M_Y(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.
Για τις σωστές δώστε επιχείρημα, για τις λάθος δώστε αντιπαράδειγμα.

7. (10 Βαθμοί) Έστω $(U_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με καθεμία να έχει κατανομή την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0,1)$. Θέτουμε $M_n := \max\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.

(α) Να δειχθεί με χρήση συναρτήσεων κατανομής ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{n(1-M_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Y. Ποια η κατανομή της Y;

(β) Ποια η πυκνότητα της M_n; Να δειχθεί με χρήση του θεωρήματος συνέχειας του Lévy η σύγκλιση κατά κατανομή του ερωτήματος (α).

8. (10 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ και $(k_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbf{1}_{|X_i|>k_n} = 0$$

με πιθανότητα 1.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Υπενθύμιση: Για $X:\Omega\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, $M_X(t) := \mathbf{E}(e^{tX})$, $\phi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX})$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Απαντήσεις

2. Έστω A_n το ενδεχόμενο τη χρονική στιγμή n να επιλεγεί το λευκό σφαιρίδιο. Πριν την εξαγωγή, η κάλπη έχει 1 λευκό και $n-1$ κόκκινα σφαιρίδια.

(α) $\mathbf{P}(A_n) = 1/n$.

(β) Τα $\{A_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ είναι ανεξάρτητα και $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$. Το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli δίνει το συμπέρασμα.

(γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n \cap A_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$, και το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.

3. (α) Για $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mathbf{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(X_n \neq 1) = 2\varepsilon_n \to 0$. Άρα η ακολουθία συγκλίνει κατά πιθανότητα στην X.

(β) Υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}|X_n - 1| = |0-1|\varepsilon_n + |1-1|(1-2\varepsilon_n) + |n^2-1|\varepsilon_n \to 1/2 (\neq 0)$$

για $n \to \infty$. Άρα δεν έχουμε σύγκλιση στον $\mathcal{L}^1$.

(γ) Συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην X γιατί από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n \neq 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon_n < \infty,$$

με πιθανότητα 1 έχουμε $X_n = 1$ τελικά (δηλαδή για όλα τα n από ένα σημείο και μετά).

4. (α) 0, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης. (β) 0, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. (γ) $\mathbf{E}(Y^2)$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

5. (α) Θεωρία.

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $e^{e^{it}-1} = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = (\phi_X(t))^2$. Έπεται ότι $\phi_X(t) = \pm e^{(1/2)(e^{it}-1)}$. Έστω $f(t) := e^{(1/2)(e^{it}-1)}$. Επειδή $\phi_X(0) = 1$, για λόγους συνέχειας (επειδή $f(0) = 1$ ενώ $-f(0) = -1$), για t σε μια περιοχή του 0 πρέπει[1] $\phi_X(t) = f(t)$. Το ίδιο ισχύει όμως για κάθε $t \in \mathbb{R}$ γιατί αν θέσουμε

$$m := \inf\{s \in \mathbb{R} : \phi_X(t) = f(t) \text{ για κάθε } t \in [s, 0]\},$$
$$M := \sup\{s \in \mathbb{R} : \phi_X(t) = f(t) \text{ για κάθε } t \in [0, s]\},$$

τότε θα δείξουμε ότι $m = -\infty$ και $M = \infty$. Πράγματι, για το πρώτο, αν $m > -\infty$, τότε για λόγους συνέχειας έχουμε $\phi_X(m) = f(m)$, και θα υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(t_n)_{n\geqslant 1}$ που συγκλίνει στο m και ικανοποιεί την $\phi_X(t_n) = -f(t_n)$. Για $n \to \infty$, αυτή η σχέση δίνει $\phi_X(m) = -f(m)$, και άρα $f(m) = 0$, που είναι άτοπο από την μορφή της f. Όμοια, $M = \infty$. Επειδή λοιπόν $\phi_X = f = \phi_Z$ όπου η Z έχει κατανομή Poisson(1/2), από το θεώρημα μοναδικότητας για χαρακτηριστικές συναρτήσεις, παίρνουμε ότι η X, όπως και η Y, ακολουθεί την κατανομή Poisson(1/2).

6. (α) Σωστό. Θεώρημα 8.2 (i) για $p = 1$. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) \leqslant (1/\varepsilon)\mathbf{E}|X_n| \to 0$ για $n \to \infty$.

(β) Λάθος. Αντιπαράδειγμα: X τ.μ. με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{x>1}.$$

(γ) Σωστό. Σίγουρα $\mathbf{E}(X^+) = \infty$, οπότε αν $\mathbf{E}(X^-) = \infty$, η $\mathbf{E}X$ δεν θα μπορούσε να οριστεί.

[1] Σε όποιον/α έγραψε αμεσως ότι η $\phi_X(t) = f(t)$ ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έδωσα όλες τις μονάδες.

(δ) Σωστό. Η σταθερή τ.μ. $Y = 0$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_Y(t) = \mathbf{E}(e^{it0}) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Κατά τα γνωστά, οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή, άρα $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(Y = 0) = 1$.

(ε) Λάθος. Υπάρχουν τ.μ. X, Y με διαφορετική κατανομή που έχουν $M_X(t) = M_Y(t) = \infty$ για $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $M_X(0) = M_Y(0) = 1$. Για παράδειγμα, τέτοιες δίνονται στην άσκηση 13.5. Άλλες είναι αυτές με πυκνότητα $f_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-a)^2}$, ($a \in \mathbb{R}$ οποιοδήποτε, ανήκουν στην οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών Cauchy).

7. (α) Για $y \geqslant 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(n(1-M_n) \leqslant y) &= \mathbf{P}\left(M_n \geqslant 1 - \frac{y}{n}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(M_n < 1 - \frac{y}{n}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X_1 < 1 - \frac{y}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \to 1 - e^{-y} \qquad \text{για } n \to \infty.\end{aligned}$$

Για $y < 0$, η ίδια πιθανότητα ισούται με 0. Δηλαδή η συνάρτηση κατανομής της $n(1 - M_n)$ συγκλίνει σε αυτήν της εκθετικής με παράμετρο 1 για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα $n(1 - M_n) \Rightarrow Y$ όπου η Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1.