Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 26 Σεπτεμβρίου 2023

1. (10 Βαθμοί) Έστω $\mathcal{C} := \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Ποια είναι η παραγόμενη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{C})$ στο $\mathbb{N}$;

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι αν η $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα (δηλαδή $A_n \subset A_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$), τότε $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

3. (35 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_1 \sim \exp(1)$, δηλαδή η X_1 έχει πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$.
(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n/\log n \geq 1$.
(β) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, η οποία και να προσδιοριστεί, ώστε με πιθανότητα 1 να ισχύει $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = c$.
(γ) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\underline{\lim}_{n\to\infty} nX_n = 0$.

4. (30 Βαθμοί) (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$, όπου $n \in \mathbb{N}^+, p \in (0, 1)$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ_X της X για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή την $\mathrm{Poisson}(\lambda)$, όπου $\lambda \in (0, \infty)$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ_Y της Y για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(γ) Έστω ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ με $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι αν $\lambda \in (0, \infty)$ και $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, τότε $X_n \Rightarrow Y$ με $Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

5. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με την X_1 ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} X_i X_j$$

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ γιατί κάθε υποσύνολο $A \subset \mathbb{N}$ γράφεται ως $A = \cup_{n\in A}\{n\}$. Αυτή η ένωση είναι αριθμήσιμη, άρα ανήκει στην $\sigma(\mathcal{C})$.

2. Θεωρία.

3. (α) Παράδειγμα 11.8 στις σημειώσεις. (β) $c = 0$, απόδειξη με δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli. (γ) Πάλι απόδειξη με δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli.

4. (α), (β) Παράδειγμα 13.4 στις σημειώσεις. (γ) Όμοια με το Παράδειγμα 15.5 στις σημειώσεις.

5. Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $U_n := X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. Τότε

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} X_iX_j = \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - \frac{U_n}{n^2}.$$

Σε ένα σύνολο με πιθανότητα 1 έχουμε $S_n/n \to \mathbf{E}(X_1) = 1/2$, $U_n/n \to \mathbf{E}(X_1^2) = 1/3$ (Εφαρμόζουμε δύο φορές τον νόμο των μεγάλων αριθμών). Άρα, με πιθανότητα 1, το ζητούμενο όριο είναι 1/4.