Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 7 Σεπτεμβρίου 2016

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που είναι ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$. Έστω και $c \in \mathbb{R}$ δεδομένο. Για καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη συνόλων να εξεταστεί αν μεταξύ τους ισχύει κάποια από τις σχέσεις $\subset, =, \supset$.

(α) $\{\overline{\lim} X_n < c\}, \liminf\{X_n < c\}$.

(β) $\{\overline{\lim} X_n \leq c\}, \limsup\{X_n \leq c\}$.

(γ) $\{\overline{\lim} X_n \leq c\}, \liminf\{X_n \leq c\}$.

(δ) $\{\overline{\lim} X_n \geq c\}, \limsup\{X_n \geq c\}$.

(ε) $\{\overline{\lim} X_n > c\}, \limsup\{X_n > c\}$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{X\geq k}) = k\mathbf{P}(X \geq k) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq j).$$

3. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$$

κατά πιθανότητα.

(β) Αν καθεμία από τις X_n έχει πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{x\geq 1}$ να δειχθεί ότι, με πιθανότητα 1, η X_n/n δεν συγκλίνει στο 0.

[Υπόδειξη: Δείξτε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $X_n \geq n$ για άπειρα n.]

4. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim$ **Γεωμετρική**$(1/n)$ για κάθε $n \geq 1$ (δηλαδή έχει $\mathbf{P}(X_n = k) = (1 - n^{-1})^{k-1}(1/n)$ για κάθε $k \geq 1$). Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_n}{n} \Rightarrow X,$$

όπου X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $X \sim \mathbf{Exp}(1)$.

5. (25 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson(a) όπου $a > 0$ δεδομένο.

(α) Να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια της X είναι $M(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda X}) = e^{a(e^{\lambda}-1)}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Legendre, Λ^*, της $\Lambda(\lambda) = \log M(\lambda)$.

(γ) Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες καθεμία με κατανομή Poisson(a) να δειχθεί ότι ισχύει

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 2an) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^{an}.$$

Υπενθυμίζεται ότι $\Lambda^*(x) := \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Σχόλια

1. (α) $\subset$.
(β) Δεν συγκρίνονται.
(γ) $\supset$.
(δ) $\supset$.
(ε) $\subset$.

2. Στην

$$X\mathbf{1}_{X\geq k} = \mathbf{1}_{X\geq k}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{X\geq j} = k\mathbf{1}_{X\geq k} + \sum_{j=k+1}^{\infty}\mathbf{1}_{X\geq j}$$

παίρνουμε μέση τιμή.

3. (α) Για $\varepsilon > 0$, η ισονομία δίνει $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon n)$, και έπειτα

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon n) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty}\{|X_1| > \varepsilon n\}) = \mathbf{P}(|X_1| = \infty) = 0.$$

(β) Εφαρμόζουμε το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli.

4. Άσκηση 15.2.

5. (β) $\Lambda^*(x) = a - x + x\log(x/a)$ για $x \geq 0$ και $\Lambda^*(x) = \infty$ για $x < 0$.
(γ) Εφαρμόζοντας επιχείρημα ανάλογο με αυτό στην απόδειξη του Λήμματος 17.5 (ii) βρίσκουμε

$$\mathbf{P}(S_n \geq 2an) \leq e^{-n\Lambda^*(2a)} = e^{-na(\log 4-1)},$$

δηλαδή το ζητούμενο.