Πιθανότητες ΙΙ

Τελική εξέταση, 7 Ιουνίου 2016

1. (20 Βαθμοί) Έστω X σύνολο και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία με στοιχεία υποσύνολα του X.

(α) Πως ορίζονται τα σύνολα $\limsup_{n\geq 1} A_n, \liminf_{n\geq 1} A_n$;

(β) Να δειχθεί ότι

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\limsup_{n\geq 1} A_n},$$
$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\liminf_{n\geq 1} A_n}.$$

Για $A \subset X$, $\mathbf{1}_A : X \to \{0, 1\}$ δηλώνει τη δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή.

(α) Τι ονομάζουμε κατανομή της X;

(β) Έστω $X, Y : \Omega \to E$ τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια κατανομή και $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι οι $f(X), f(Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ έχουν την ίδια κατανομή.

3. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 3}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε για κάθε $n \geq 3$

$$X_n = \begin{cases} -n & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n\log n}, \\ n & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n\log n}, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - \frac{1}{n\log n}. \end{cases}$$

Θέτουμε $S_n := X_3 + X_4 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 3$.

(α) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{E}(S_n), \operatorname{Var}(S_n)$ για κάθε $n \geq 3$.

(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\varlimsup_{n\to\infty} X_n/n = 1, \varliminf_{n\to\infty} X_n/n = -1$.

4. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας και με τιμές στο $\mathbb{R}$.

(α) Αν $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}(X_n^2) = M < \infty$, τότε η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή.

(β) Αν η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή, $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$, και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^2) = \infty$, να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(X_n) = \infty$.

5. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $(Y_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε $Y_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ όπου $\mu_n \in \mathbb{R}, \sigma_n \in (0, \infty)$. Για δεδομένα $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in (0, \infty)$ θεωρούμε $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Αν $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ και $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, να δειχθεί ότι $Y_n \Rightarrow Y$.

(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε $X_1 \sim N(0, 1)$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(W_n)_{n\geq 1}$ με

$$W_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k$$

για κάθε $n \geq 1$ συγκλίνει κατά κατανομή σε τυχαία μεταβλητή Z της οποίας η κατανομή να προσδιοριστεί.

6. (10 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson(λ) όπου $\lambda > 0$ δεδομένο. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Υπενθύμιση:

(α) Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ που είναι ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται σφιχτή αν

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n| > K) = 0.$$

(β) Κάθε τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

Σχόλια

2. (β) Για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{P}^{f(X)}(A) = \mathbf{P}(f(X) \in A) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A)) = \mathbf{P}(Y \in f^{-1}(A)) = \mathbf{P}(f(Y) \in A) = \mathbf{P}^{f(Y)}(A)$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή. Άρα $\mathbf{P}^{f(X)} = \mathbf{P}^{f(Y)}$.

3. $\sum_{n=3}^{\infty} 1/(n \log n) = \infty$ από το κριτήριο του ολοκληρώματος αφού

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx \overset{y=\log x}{=} \int_{\log 3}^{\infty} \frac{1}{y}\, dy = \infty.$$

5. (β) Ένας τρόπος. Από τις στοιχειώδεις πιθανότητες, γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό το εφαρμόζουμε στην W_n. Έπειτα η μέση τιμή της W_n είναι 0 ενώ η διασπορά της είναι

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

η οποία συγκλίνει στο $1/2$. Έπεται από το ερώτημα (α) ότι η W_n συγκίνει κατά κατανομή σε τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0, 1/2)$.

Εναλλακτικά, υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της W_n και δείχνουμε ότι συγκλίνει στην $e^{-t^2/4}$.