Πιθανότητες ΙΙ

Ενδιάμεση εξέταση. 9 Απριλίου 2022

1. (15 Βαθμοί) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Για συγκεκριμένα $x_0, y_0 \in X$ γνωρίζουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{C}$,

$$x_0, y_0 \in A \text{ ή } x_0, y_0 \in X \setminus A. \tag{$\star$}$$

(Δηλαδή τα x_0, y_0 δεν χωρίζονται από κάποιο στοιχείο της $\mathcal{C}$). Να δειχθεί ότι η ($\star$) ισχύει για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{C})$

2. (15 Βαθμοί) (α) Ποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ λέμε Borel;
(β) Έστω $\mathcal{A} := \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Να δειχθεί ότι $[a,b], (a,b) \in \sigma(\mathcal{A})$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

3. (15 Βαθμοί) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή και $F(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση κατανομής της.
(α) Να δειχθεί ότι η F είναι αύξουσα.
(β) Να εκφραστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(X < a)$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) ως συνάρτηση της F.

4. (15 Βαθμοί) Έστω X, F όπως στην προηγούμενη άσκηση. Για δεδομένο $t \in (0,1)$, θέτουμε $c := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant t\}$. Να δειχθεί ότι
(α) $c \in \mathbb{R}$,
(β) $F(c) \geqslant t$.

5. (15 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$ και $r \in (0, \infty)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X \mathbf{1}_{X>r}) = r\mathbf{P}(X > r) + \int_r^\infty \mathbf{P}(X > s)\, ds.$$

6. (15 Βαθμοί) Έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$, τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{E}|X_n| = 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

7. (15 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και με $\mathbf{E}(X) = 4$. Να υπολογιστούν τα όρια
(α) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leqslant n})$
(β) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|\geqslant n})$

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. Θέτουμε $\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) :$ η $(\star)$ ισχύει για το $A\}$. Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{C}$.

3. (β) $F(a-)$.

6. Η $(X_n)_{n\geqslant 1}$ συγκλίνει στο 0 στον $\mathcal{L}^1$, οπότε ...

7. Εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Κυριαρχούσα συνάρτηση η $|X|$.
(α) 4. (β) 0.