Άσκησεις στις μεγάλες αποκλίσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Λ^* στην περίπτωση που η X_1 ακολουθεί την κατανομή

(α) Poisson(a),

(β) exp(a),

(γ) $N(0, \sigma^2)$,

όπου $a, \sigma > 0$. Επίσης, με χρήση Mathematica ή άλλου προγράμματος να γίνει σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση του Λ^*.

2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Λ^* στην περίπτωση που η X_1 έχει πυκνότητα $f(x) = (3/2)|x|^{-4}\mathbf{1}_{|x|\geq 1}$. Τι πληροφορίες δίνει το άνω και το κάτω φράγμα της αρχής μεγάλων αποκλίσεων για την ακολουθία S_n/n;

3. Εκτελούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος και ονομάζουμε S_n το πλήθος των φορών που ήρθε η ένδειξη κεφαλή στις πρώτες n ρίψεις.

(α) Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού

$$I(x) := \begin{cases} \log 2 + x\log x + (1-x)\log(1-x) & \text{αν } x \in [0,1], \\ \infty & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]. \end{cases}$$

(β) Για την πιθανότητα $\mathbf{P}(S_{1000} \geq 700)$ να προσδιοριστεί το φράγμα που δίνει το Λήμμα 17.5 και η προσέγγιση που δίνει το κεντρικό οριακό θεώρημα.

4. Έστω ακολουθία μέτρων πιθανότητας $(\mu_n)_{n\geq 1}$ σε έναν μετρικό χώρο $\mathcal{X}$ η οποία ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα a_n και συνάρτηση ρυθμού I (Ορισμός 17.1). Να δειχθεί ότι $\inf\{I(x) : x \in \mathcal{X}\} = 0$.

5. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, έστω Y_n τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1/n)$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού $I(x) = x^2/2$ $x \in \mathbb{R}$.

6. Να αποδειχθεί ο ισχυρισμός του Παραδείγματος 17.2.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ και $D_f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \infty\}$.

(α) Αν $0 \in D_f^\circ$, τότε

$$\varliminf_{|x|\to\infty} \frac{f^*(x)}{|x|} > 0,$$

και άρα $\lim_{|x|\to\infty} f^*(x) = \infty$.

(β) Αν $D_f = \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f^*(x)}{|x|} = \infty.$$

8. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_1 (με τιμές στο $\mathbb{R}$) έχει ροπογεννήτρια M η οποία είναι πεπερασμένη για όλα τα λ σε μια περιοχή του μηδενός και μέση τιμή $m = \mathbf{E}(X_1)$. Να δειχθεί ότι για την συνάρτηση ρυθμού της αρχής μεγάλων αποκλίσεων που δίνει το Θεώρημα Cramer ισχύει $I(x) > 0$ για κάθε $x \neq m$. Οπότε το m είναι το μοναδικό μηδενικό της I.

9. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0,\infty)$ ώστε η ροπογεννήτρια της X_1 να είναι η

$$M(t) = \begin{cases} e^{-C|t|^a} & \text{αν } t \leq 0, \\ \infty & \text{αν } t > 0, \end{cases}$$

όπου $C > 0$ και $a \in (0,1)$. Θέτουμε $S_k := X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}(S_k < tk^{1/a}) \leq e^{-C_1 t^{-\frac{a}{1-a}}} \tag{1}$$

με $C_1 := (1-a)(Ca^a)^{(1-a)^{-1}}$.

Σχόλια: 1) Αποδεικνύεται ότι για κάθε $C > 0$ και $a \in (0,1)$ υπάρχει τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια όπως πιο πάνω. Μάλιστα αυτή η τυχαία μεταβλητή έχει μέση τιμή ∞.

2) Μπορούμε να δείξουμε ότι η $S_k/k^{1/a}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια μη σταθερή τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα. Άρα το όριο για $k \to \infty$ της πιθανότητας στην (1) είναι $\mathbf{P}(Y < t)$. Προσέξτε ότι η (1) ισχύει για όλα τα k και όχι απλώς για τα μεγάλα k.

Απαντήσεις

1. Λύνουμε τα αντίστοιχα προβλήματα μεγιστοποίησης με χρήση παραγώγων. Οι απαντήσεις είναι ως εξής.

(α) $\Lambda^*(x) = a - x + x\log(x/a)$ για $x \geq 0$ και $\Lambda^*(x) = \infty$ για $x < 0$.

(β) $\Lambda^*(x) = ax - 1 - \log(ax)$ για $x > 0$ και $\Lambda^*(x) = \infty$ για $x \leq 0$.

(γ) $\Lambda^*(x) = x^2/(2\sigma)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. $M(\lambda) = \infty$ για κάθε $\lambda \neq 0$ και $M(0) = 1$. Έτσι $\Lambda^*(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το άνω φράγμα της αρχής για ένα μη κενό σύνολο Borel A λέει απλώς ότι το όριο $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{-1} \log \mu_n(A)$ είναι ≤ 0, κάτι που το γνωρίζουμε από πριν αφού $\mu_n(A) \leq 1$ (άρα το άνω φράγμα είναι άχρηστο). Το κάτω φράγμα όμως λέει κάτι χρήσιμο. Δηλαδή ότι αν το A έχει μη κενό εσωτερικό τότε η πιθανότητα $\mu_n(A)$ δεν είναι εκθετικά μικρή. Π.χ., μπορεί να είναι της τάξης του n^{-100} αλλά όχι της τάξης του e^{-n}.

3. Θέτουμε $X_i = 1$ αν η i ρίψη του νομίσματος φέρει κεφαλή και $X_i = 0$ αν αυτή η ρίψη φέρει γράμματα. Οι $(X_i)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(α) Δουλεύουμε όπως στο Παράδειγμα 17.4. Εναλλακτικά, θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_i := 2X_i - 1$ και θέτουμε $\Sigma_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Η $(\Sigma_n/n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με συνάρτηση ρυθμού $\tilde{I}$ όπως στο Παράδειγμα 17.4. Από αυτό προκύπτει η αρχή μεγάλων αποκλίσεων για την $(S/n)_{n\geq 1}$ με συνάρτηση ρυθμού $I(x) = \tilde{I}(2x - 1)$.

(β) Το λήμμα δίνει το φράγμα $e^{-1000I(7/10)} \approx 1.84073 \times 10^{-36}$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει τη προσέγγιση

$$\mathbf{P}(S_{1000} \geq 700) \approx 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) \approx 1.26981 \times 10^{-10}.$$

Προφανώς αυτή είναι λάθος. Δεν είναι αρμόζουσα η εφαρμογή του κεντρικού οριακού θεωρήματος σε αυτή την περίπτωση.

4. Εφαρμόζουμε τον ορισμό για το σύνολο $\mathcal{X}$, το οποίο έχει $\mu_n(\mathcal{X}) = 1$.

5. Γράφουμε $Y_n = Z/\sqrt{n}$ με $Z \sim N(0,1)$. Έστω f_Z η πυκνότητα της f_Z. Για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\mathbf{P}(Y_n \in A) = \mathbf{P}(Z \in \sqrt{n}A) = \int_{\sqrt{n}A} f_Z(x)\,dx = \sqrt{n}\int_A f_Z(y\sqrt{n})\,dy.$$

Για το κάτω φράγμα της αρχής των μεγάλων αποκλίσεων παίρνουμε $x \in A^o$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, η πιο πάνω πιθανότητα φράσσεται από κάτω απο την ποσότητα

$$\sqrt{n}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_Z(y\sqrt{n})\,dy \geq \frac{\sqrt{n}2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \min\{e^{-(x-\varepsilon)^2 n/2}, e^{-(x+\varepsilon)^2 n/2}\}$$

Η συνέχεια αφήνεται στον αναγνώστη. Για το άνω φράγμα, θέτουμε $c := \inf\{|x| : x \in \overline{A}\}$. Τότε $A \subset (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$ και άρα με χρήση της Άσκησης 7.4 έχουμε

$$\mathbf{P}(Y_n \in A) \leq \mathbf{P}(|Z| \geq c\sqrt{n}) \leq 2\frac{1}{c\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} e^{-nc^2/2}.$$

Άρα $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(Y_n \in A) \leq -c^2/2 = -\inf\{I(x) : x \in \overline{A}\}$.

6. Η απόδειξη είναι ανάλογη της προηγούμενης άσκησης. Μάλιστα οι εκτιμήσεις είναι πιο εύκολες.

7. Για κάθε t έχουμε $f^*(x) \geq tx - f(t)$. Παίρνοντας $t > 0$ με $f(t) < \infty$ έχουμε

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{f^*(x)}{x} \geq t,$$

ενώ αν πάρουμε $t < 0$ με $f(t) < \infty$ έχουμε

$$\varliminf_{x\to-\infty} \frac{f^*(x)}{|x|} \geq |t|.$$

Τα (α), (β) έπονται εύκολα από αυτές τις ανισότητες.

8. Για κάθε $\lambda \neq 0$ αρκετά μικρό έχουμε

$$I(x) \geq \lambda x - \log M(\lambda) = \lambda\left(x - \frac{\log M(\lambda)}{\lambda}\right). \tag{2}$$

Όμως το όριο της $\log M(\lambda)/\lambda$ για $\lambda \to 0$ ισούται με την παράγωγο της $\log M(\lambda)$ στο 0, η οποία ισούται με $M'(0)/M(0) = m$ με βάση το Λήμμα 17.6. Άρα αν $x > m$, τότε παρατηρούμε ότι για $\lambda > 0$ κοντά στο 0 το δεξί μέλος της (2) είναι θετικό. Αν $x < m$ παίρνουμε $\lambda < 0$ κοντα στο 0.

9. Για κάθε $\lambda < 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(S_k < tk^{1/a}) = \mathbf{P}(\lambda S_k > \lambda tk^{1/a}) \leq e^{-\lambda tk^{1/a}} M(\lambda)^k.$$

Παίρνουμε το ελάχιστο του δεξιού μέλους ως προς λ.