Άσκησεις

(1) Έστω $c > 0$ και $(U_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, c)$. Θέτουμε $S_n := \sum_{k=1}^{n} U_1 U_2 \cdots U_k$ για κάθε $n \geq 1$ και $S := \lim_{n\to\infty} S_n$.

(α) Να δειχθεί ότι ισχύει $\mathbf{E}(S) < \infty$ αν και μόνο αν $c < 2$

*(β) Να δειχθεί ότι ισχύει $S < \infty$ με πιθανότητα 1 αν και μόνο αν $c < e$.

*(γ) Θέτουμε $R_n := \sum_{k=1}^{n} U_k U_{k+1} \cdots U_n$ για κάθε $n \geq 1$. Για $c < e$, να δειχθεί ότι $R_n \Rightarrow S$ αλλά η $(R_n)_{n\geq 1}$ δεν συγκλίνει σχεδόν βέβαια. Μάλιστα, με πιθανότητα 1 η $(R_n)_{n\geq 1}$ δεν συγκλίνει (στο $[0, \infty]$).

(2) Έστω $p \in (0, 1)$ και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p, \mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. Θέτουμε

$$Y := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

*(α) Αν $p = 1/2$, να δειχθεί ότι η κατανομή της Y είναι το μέτρο Lebesgue στο $(0, 1)$. Δηλαδή η Y έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

**(β) Αν $p \neq 1/2$, να δειχθεί ότι η Y έχει ιδιάζουσα κατανομή. Δηλαδή υπάρχει συνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ και $\mathbf{P}(Y \in A) = 1$.