Πιθανότητες ΙΙ. Βασικά σημεία.

(1) Πως δείχνουμε ότι μια οικογένεια συνόλων είναι σ-άλγεβρα;

(2) Πρόταση 2.11 και χρήσεις της. Ασκήσεις 2.3, 2.5, 2.6, 6.15.

(3) Πως δείχνουμε ότι μια συνάρτηση $f : E \to G$ είναι μετρήσιμη ως προς δεδομένες σ-άλγεβρες $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ στα πεδία ορισμού και τιμών.

(4) Σε ποιά σενάρια ξέρουμε ότι σίγουρα ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(f_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} f_n)\,;$$

(5) Ανισότητες Markov, Chebyshev. Η λογική της απόδειξης τους. Ασκήσεις 6.7, 6.8, 12.1.

(6) Πως υπολογίζουμε μέσες τιμές και πιθανότητες που αφορούν τυχαίες μεταβλητές που είναι διακριτές ή έχουν πυκνότητα.

(7) Λήμματα Borel-Cantelli.

Αν έχουμε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ και μία τυχαία μεταβλητή X. Πως δείχνουμε ότι (για $n \to \infty$)

(8) $X_n \to X$ κατά πιθανότητα.

(9) $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^p$.

(10) $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια.

(11) $X_n \Rightarrow X$ (σύγκλιση κατά κατανομή).

Πως συμπεριφέρεται το άθροισμα, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών; Ασκήσεις 12.1-12.7, 17.3, 17.5. Σχετικά θέματα εξετάσεων.

(3) Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 5.1.

(4) Θεώρημα μονότονης σύγκλισης, Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Επίσης, Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης (για χώρους πεπερασμένου μέτρου).

(6) Προτάσεις 7.6, 7.8. Παράδειγμα 7.7.

(8) Κάνουμε ένα από τα εξής

   (α′) Για $\varepsilon > 0$, υπολογίζουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$, αν ξέρουμε την κατανομή της $X_n - X$, και δείχνουμε ότι τείνει στο 0.

   (β′) Για $\varepsilon > 0$, φράζουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ από κάτι που τείνει στο 0,

   (γ′) Δείχνουμε ότι $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια ή στον $\mathcal{L}^p$ για κάποιο $p > 0$.

(9) Κάνουμε ένα από τα εξής

   (α′) Υπολογίζουμε την $\mathbf{E}(|X_n - X|^p)$ και δείχνουμε ότι τείνει στο 0.

   (β′) Δείχνουμε ότι $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια ή κατά πιθανότητα αλλά και ότι υπάρχει $Y \geq 0$ με $|X_n| \leq Y$ και $\mathbf{E}(Y^p) < \infty$, και έπειτα επικαλούμαστε το Θεώρημα 8.5.

(10) Κάνουμε ένα από τα εξής

   (α′) Βλέπουμε αν προκύπτει από κάποιο αναλυτικό επιχείρημα που δεν έχει βάση πιθανοτική.

   (β′) Εξετάζουμε αν είναι συνέπεια του νόμου των μεγάλων αριθμών.

   (γ′) Χρησιμοποιούμε τα δύο λήμματα Borel-Cantelli

(11) Κάνουμε ένα από τα εξής

   (α′) Εφαρμόζουμε τον ορισμό. Δες Παραδείγματα 15.5, 15.6, και Άσκηση 15.2 από την τελευταία έκδοση των σημειώσεων (4 Μαρτίου 2015).

   (β′) Χρησιμοποιούμε χαρακτηριστικές συναρτήσεις (Παραδείγματα 16.5, 16.6. Ασκήσεις 16.1-16.3).