Πιθανοτητες II. Προβληματα

1) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ως συνήθως, θεωρούμε το πεδίο τιμών της f (το $\mathbb{R}$) εφοδιασμένο με τη σ-αλγεβρα των συνόλων Borel. Περιγράψτε την $\sigma(f)$ περίπτωση που $f(x) = x^2$.

2) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$, και $\mathbf{E}(X) < \infty$. Έστω και $c > 1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^k \mathbf{P}(X \geq c^k) < \infty.$$

3) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(X^2) = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\{\mathbf{E}(X \mathbf{1}_{|X| \leq M})\}^2}{\mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X| \leq M})} = 0.$$

4) Έστω $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων με $\mathbf{P}(A_n) < 1$ για κάθε $n \geq 1$, και $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Να δείξετε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$.

5) Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε η κατανομή της X_1 να μην είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο (δηλαδή δεν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(X = c) = 1$). Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\lim_{n \to \infty} X_n \text{ υπάρχει }) = 0.$$

6) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = |x|^{-3} \mathbf{1}_{|x| \geq 1}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $t \in [-1, 1]$ ισχύει

$$\left| \phi_X(t) - 1 - t^2 \log |t| \right| \leq 3t^2. \tag{1}$$