

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, 22/6/2010, Α

Θέμα 1. Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{xy}{2}, \quad 0 < x < y < 2.$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και η συνδιακύμανση $C(X, Y)$ και (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{X|Y}(x|y)$ και η καμπύλη παλινδρόμησης $x = m_{X|Y}(y)$ της X στην Y .

Θέμα 2. Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty.$$

(α) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{Z,W}(z,w)$ τυχαίων μεταβλητών $Z = X$ και $W = Y - X$ και εξετασθεί αν οι Z και W είναι ανεξάρτητες. (β) Να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της διαφοράς $T = Z - W$.

Θέμα 3. (α) Έστω X_κ , $\kappa = 1, 2, \dots$, ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_\kappa) = \mu$ και $V(X_\kappa) = \sigma^2$, $\kappa = 1, 2, \dots$. Επίσης, έστω N ακέραη τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη των X_1, X_2, \dots , με $E(N) = \nu$ και $V(N) = \tau^2$. Αν $S_N = \sum_{\kappa=1}^N X_\kappa$, να υπολογισθούν οι $E(S_N)$ και $V(S_N)$.

(β) Έστω ότι ένας κλήρος εξάγεται τυχαία από μια κληρωτίδα που περιέχει τους αριθμούς $\{1, 3, 5\}$. Ακολουθώς, ένας συνήθης κύβος ρίχνεται τόσες φορές όσες ο αριθμός του κλήρου που εξάγεται και καταγράφεται το άθροισμα των αποτελεσμάτων των ρίψεων. Να υπολογισθεί η μέση τιμή του αθροίσματος αυτού.

Θέμα 4. (α) Ας θεωρήσουμε μια στοχαστική ακολουθία ανεξαρτήτων επιλογών ν αριθμών από την ομοιόμορφη στο διάστημα $(2, 4)$. Έστω X_κ ο αριθμός που εκλέγεται στην κ -οστή επιλογή, $\kappa = 1, 2, \dots$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa$, $\nu = 1, 2, \dots$, συγκλίνει στοχαστικά στο 3.

(β) Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών μιας σελίδας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 0,7$. Αν η εφημερίδα έχει 64 σελίδες, ποιά είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το πολύ 36 σελίδες να μην έχουν τυπογραφικά λάθη; [Δίνονται: $e^{-0,7} \cong 1/2$, $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(2) = 0,9546$, $\Phi(3) = 0,9987$]

Προσοχή! Να γράφετε για κάθε συνάρτηση το πεδίο ορισμού της.

Διάρκεια εξέτασης 2 1/2 ώρες. Καλή επιτυχία