

$$E_{Y|X} = E_{Y|X} = \int y f_{Y|X} dy = \int_{-x}^x y \frac{x-y}{2x^2} dy$$

$$= \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^x = \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] - \left[-x^2 + \frac{x^2}{2} \right] = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$x - a \quad aX + b$$

$$\rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad b = \mu_y - a(\mu_x)$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ II

Εξετάσεις Ιουνίου 2008

Ομάδα Α

ΘΕΜΑ 1. Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3(x-y)}{2}, & |y| < x < 1, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \quad E_{X|Y} = \int_0^1 x f_{X|Y} dx$$

Να βρεθούν:

- (α) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y|X}(y|x)$,
- (β) η καμπύλη παλινδρόμησης $y = m_{Y|X}(x)$ και η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης,
- (γ) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $Z=X$ και $W=(X-Y)/(2X)$ και να εξετασθεί αν αυτές είναι ανεξάρτητες.

ΘΕΜΑ 2. Έστω ότι η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) έχει την τριωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{8!}{x!y!(8-x-y)!} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^y \left(\frac{11}{20}\right)^{8-x-y}$$

με $x, y = 0, 1, \dots, 8$ και $x + y \leq 8$. Να βρεθούν:

- (α) η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$,
- (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$,
- (γ) η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X = x | X+Y = 5)$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X_κ , $\kappa=1, 2, \dots$ ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_\kappa) = 2\kappa$ και $V(X_\kappa) = 2\kappa \leq \alpha < +\infty$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\bar{X}_\nu - \nu$, $\nu=1, 2, \dots$, συγκλίνει στοχαστικά (δηλαδή κατά πιθανότητα) στο ένα.

(β) Χρησιμοποιώντας γνωστό θεώρημα, να δειχθεί ότι

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\nu \sum_{\kappa=0}^{[\nu/3]} \binom{\nu}{\kappa} \left(\frac{1}{2}\right)^\kappa = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{X}_\nu) = \sum \binom{\nu}{x}$$

Απαντήστε και στα 3 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες.

Καλή επιτυχία.