ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Ιούνιος 2005

Θέμα 1ο: Έστω $(X,Y)'$ μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\theta^2}{2}e^{-\theta y},\ -y<x<y,\ 0<y<\infty,\ (0<\theta<\infty).$$

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{X|Y}(x\mid y)$. (β) Να υπολογισθεί η συνδιακύμανση $C(X,Y)$. (γ) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{Z,W}(z,w)$ των τυχαίων μεταβλητών $Z=X+Y$ και $W=Y-X$ και να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

Θέμα 2ο: Έστω $(X,Y)'$ μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με $\mu_X=1$, $\mu_Y=2$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=5$ και $\rho_{X,Y}=3/5$. (α) Να υπολογισθούν οι διασπορές σ_U^2, σ_W^2 και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{U,W}$ των τυχαίων μεταβλητών $U=X+Y$ και $W=-5X+Y$. Υποθέτοντας ότι η $(X,Y)'$ ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή, υπολογίστε (β) τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X\le 3{,}2\mid Y=7)$ και (γ) την πιθανότητα $P(X+Y\le 3)$.

Θέμα 3ο: Έστω *X* και *Y* δίτιμες μηδέν–ένα τυχαίες μεταβλητές και από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x-y},\ x=0,1,\quad y=0,1,\quad x+y\le 1.$$

(α) Να βρεθούν οι γεννήτριες πιθανοτήτων $P_{X,Y}(t,u)$ της $(X,Y)'$, $P_Y(u)$ της *Y* και $P_Z(t)$ της $Z=X+Y$. (β) Αν Y_κ, $\kappa=1,2,\ldots,\nu$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή την κατανομή της *Y*, υπολογίστε την πιθανογεννήτρια του αθροίσματος $S_\nu=Y_1+Y_2+\Lambda+Y_\nu$ και συμπεράνετε τη συνάρτηση πιθανότητας $f_{S_\nu}(x)$. (γ) Αν Z_κ, $\kappa=1,2,\ldots$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή την κατανομή της *Z* και *N* είναι μία μη αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις Z_κ, $\kappa=1,2,\ldots$, με $P(N=\nu)=e^{-\lambda}\lambda^\nu/\nu!$, $\nu=0,1,\ldots$, υπολογίστε την πιθανογεννήτρια του αθροίσματος $S_N=Z_1+Z_2+\Lambda+Z_N$ και συμπεράνετε τη συνάρτηση πιθανότητας $f_{S_N}(x)$.

Θέμα 4ο: Έστω $Z_1,Z_2,\ldots,Z_\nu$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή την τυποποιημένη κανονική. (α) Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $Y_i=Z_i^2$, $i=1,2,\ldots,\nu$, ακολουθεί τη χι τετράγωνο κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας (β) Ποιά κατανομή ακολουθεί το άθροισμα $U_\nu=\sum_{i=1}^{\nu}Z_i^2$ και γιατί; (γ) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση κατανομής $F_\nu(u)=P(U_\nu\le u)$, για μεγάλο *ν*, δύναται να προσεγγισθεί από κανονική κατανομή και συγκεκριμένα $F_\nu(u)\cong\Phi\left(\frac{u-\nu}{\sqrt{2\nu}}\right)$.

Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες. Καλή Επιτυχία.