

## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Σεπτέμβριος 2003

**Θέμα 1ο:** Έστω  $(X, Y)$  διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3x + 2y + 1}{27}, \quad x = 0, 1, \quad y = 0, 1, 2.$$

Να υπολογισθούν: (α) οι περιθώριες και οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ ,  $f_{X|Y}(x|y)$  και  $f_{Y|X}(y|x)$ , (β) οι καμπύλες παλινδρόμησης  $x = m_{X|Y}(y)$  και  $y = m_{Y|X}(x)$  και (γ) η συνδιακύμανση  $C(X, Y)$ .

**Θέμα 2ο:** Έστω  $Z$  και  $W$  ανεξάρτητες τυποποιημένες κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Να υπολογισθούν (α) ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών  $X = Z$  και  $Y = \rho Z + \sqrt{1 - \rho^2} W$ ,  $-1 < \rho < 1$  και (β) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των  $X$  και  $Y$ . (γ) Αν  $S$  και  $T$  είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφες τ.μ. στο διάστημα  $[0, 1]$  να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας του αθροίσματος  $U = S + T$ .

**Θέμα 3ο:** Έστω η διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή  $(X, Y)$  με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad y = 0, 1, \dots, x.$$

Να βρεθούν (α) η πιθανογεννήτρια  $P_{X,Y}(t, u) = E[t^X u^Y]$  της  $(X, Y)$  και η πιθανογεννήτρια  $P_Z(t)$  της τυχαίας μεταβλητής  $Z = X + Y$ , (β) οι πιθανογεννήτριες  $P_X(t)$  και  $P_Y(u)$  των περιθωρίων συναρτήσεων πιθανότητας των  $X$  και  $Y$ , αντίστοιχα, (γ) η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας  $f_Y(y)$  της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  και (δ) οι  $E(X)$ ,  $E(Y)$  και  $Cov(X, Y)$ .

**Θέμα 4ο:** (α) Οι χρόνοι ζωής των τηλεχειριστηρίων που λανσάρει μία εταιρεία είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 0 έως 5 χρόνια. Το τμήμα μάρκετινγκ δίνει εγγύηση λειτουργίας 1 χρόνο για κάθε τηλεχειριστήριο. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα όπως σε μία παρτίδα 1000 τηλεχειριστηρίων να υπάρχουν το πολύ 40 τηλεχειριστήρια που θα χαλάσουν πριν λήξει η εγγύηση.

(β) Σε μία Χριστουγεννιάτικη συνεστίαση υπάρχουν  $n$  καλεσμένοι και καθένας απ' αυτούς έχει φέρει ένα δώρο για να τηρήσουν το έθιμο της ανταλλαγής των δώρων. Τα κουτιά με τα δώρα ανακατεύονται και ο καθένας επιλέγει ένα στην τύχη. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των καλεσμένων που θα επιλέξουν το δώρο που έφεραν οι ίδιοι.

(Δίνονται  $\Phi(0,2) = 0,5795$ ,  $\Phi(0,4) = 0,6554$ ,  $\Phi(0,6) = 0,7257$ ,  $\Phi(0,8) = 0,7881$ ,  $\Phi(1) = 0,8413$ ).

**Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 1/2 ώρες**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**