Πιθανότητες ΙΙ. Ασκήσεις 2

Μετασχηματισμοι τυχαιων μεταβλητων

Ανεξαρτησια, συσχετιση, δεσμευμενη μεση τιμη

1. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$.
(α) Να δειχθεί ότι η από κοινού πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών

$$U := X + Y,$$
$$V := X - Y$$

ισούται με

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$.

(β) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή $N(0,1)$ να δειχθεί ότι οι $X+Y, X-Y$ είναι ανεξάρτητες, και καθεμία ακολουθεί την κατανομή $N(0,2)$.

(γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή εκθετική με παράμετρο $\lambda > 0$, ποιά είναι η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X-Y$; Είναι οι $X+Y, X-Y$ ανεξάρτητες; Τι κατανομή ακολουθεί καθεμιά τους;

(δ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$, ποιά είναι η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X-Y$; Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο είναι θετική;

2. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, με καθεμιά τους να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ,

(α) Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X/Y$. Είναι ανεξάρτητες;

(β) Να βρεθεί η πυκνότητα της X/Y.

(γ) Ποιά είναι η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $X+Y=a$, όπου $a>0$ είναι μια δεδομένη σταθερά. [Υποδ.: Βρίσκουμε πρώτα την από κοινού των $X, X+Y$]

3. Έστω $a, b > 0$ και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με

$$X \sim \Gamma(a,1), \;\; Y \sim \Gamma(b,1).$$

Να δειχθεί ότι οι

$$U := \frac{X}{X+Y}, \;\; V := X+Y$$

είναι ανεξάρτητες, και

$$U \sim \text{Βήτα}(a,b), \;\; V \sim \Gamma(a+b,1).$$

4. Άν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, με την X να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(-2,3)$ και την Y να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, να βρεθεί η πυκνότητα της $X+Y$.

5. Έστω $a, b, c > 0$, και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με την X να ακολουθεί την κατανομή Βήτα(a, b) και την Y να ακολουθεί την Βήτα$(a+b, c)$. Να δειχθεί ότι η XY ακολουθεί την Βήτα$(a, b+c)$.

6. Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από μία δεδομένη κατανομή με συνάρτηση κατανομής F. Θέτουμε

$$X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\},$$
$$X_{(n)} := \max\{X_1, \dots, X_n\},$$

την μικρότερη και την μεγαλύτερη παρατήρηση αντίστοιχα.

(α)* Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X_{(1)}, X_{(n)}$.

(β) Υποθέτοντας ότι η F είναι συνεχής και έχει πυκνότητα f με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας, να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $X_{(1)}, X_{(n)}$.

(γ) Αν οι $X_1, \dots, X_n$ ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, a)$, όπου a είναι γνωστός θετικός αριθμός, να βρεθεί η πυκνότητα του δειγματικού εύρους $R := X_{(n)} - X_{(1)}$, και να δειχθεί ότι

$$E(R) = \frac{n-1}{n+1}\, a.$$

7. Αν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ και r είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η $Y = rX$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda/r)$.

8. Έστω $X_1, X_2, \dots . X_n$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

(α) Ποιά είναι η κατανομή της $-\log X_1$;

(β) Ποιά είναι η κατανομή της $Y := -\log(X_1 X_2 \cdots X_n)$;

(γ) Να δειχθεί ότι η $2Y$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας.

9. Έστω (X, Y) συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή που έχει πυκνότητα $f(\cdot, \cdot)$. Να δειχθεί ότι $P(X = Y) = 0$, δηλαδή δεν έχουμε ποτέ σύμπτωση/ισοπαλία των X, Y.

Ειδική περίπτωση είναι όταν οι X, Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, και έχουν και οι δυό τους πυκνότητα.

10. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 ανεξάρτητες και ισόνομες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα $f(\cdot)$. Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε μετάθεση των (i_1, i_2, i_3, i_4) των (1, 2, 3, 4), π.χ. $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (2, 4, 3, 1)$, ισχύει

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}) = \frac{1}{4!}$$

Ποιό είναι το ανάλογο αποτέλεσμα όταν έχουμε n τυχαίες μεταβλητές;

11. Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $E(X^2), E(Y^2) < \infty$, $Z \sim N(0, 1)$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$, και η Z ανεξάρτητη απο τις X, Y. Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

12. Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και καθεμία ακολουθεί την εκθετική με μέση τιμή μ. Να βρείτε την συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)$ καθώς και τον συντελεστή συσχέτισης $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)$. Είναι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + X_2$ και $2X_1 + 3X_2$ ανεξάρτητες;

13. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 για τις οποίες ξέρουμε μόνο ότι $V(X_1) = 3, V(X_2) = 2$.

(α) Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $V(X_1 + X_2)$;

(β) Πως σχετίζονται στις δύο ακραίες περιπτώσεις του ερωτήματος (α) οι X_1, X_2;

14. Έστω τυχαία μεταβλητή X με διασπορά $V(X) = a \in (0, \infty)$.
(α) Για $c \in [0, 1]$ δεδομένο, να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $\rho(X, Y) = c$.

(β) Για $c \in [-1, 0]$ δεδομένο, να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $\rho(X, Y) = c$.

15. Έστω $n \geq 4$. Επιλέγουμε (ομοιόμορφα) τυχαία έναν αριθμό στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ και τον καλούμε X. Έπειτα ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα, και θέτουμε

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{αν } X = 1, \\ n-1 & \text{αν } X = n, \\ X+1 & \text{αν } X \neq 1, X \neq n, \text{ και έχει έρθει κορώνα,} \\ X-1 & \text{αν } X \neq 1, X \neq n \text{ και έχει έρθει γράμματα.} \end{cases}$$

Δηλαδη επιλέγουμε τυχαία έναν από τους γείτονες του X, αν υπάρχει επιλογή, ενώ αν υπάρχει μόνο ένας γείτονας, πάμε ντετερμινιστικά σε αυτόν.

(α) Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y;

(β) Τι πρόσημο περιμένουμε να έχει η $\mathrm{Cov}(X, Y)$ για μεγάλο n;

(γ) Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Για ποιά n είναι θετική;

16. Έστω A, B ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας, και $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ οι δείκτριες συναρτήσεις τους. Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

17. $n \geq 1$ άτομα επιβιβάζονται τυχαία σε ένα αεροπλάνο n θέσεων, αγνοώντας την ανάθεση θέσης που λέει η κάρτα επιβίβασης τους. Έστω W ο αριθμός αυτών που κάθονται (συμπτωματικά) στην θέση που τους ανατέθηκε. Θέτουμε $X_i = 1$ αν ο i επιβάτης κάθησε στην θέση που αναφέρει η κάρτα του και $X_i = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ για $i \neq j$. Πώς σχολιάζετε το πρόσημό της;

(β) Να υπολογιστούν οι $E(W), V(W)$.

18. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή, με μέση τιμή μ, και διακύμανση $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Θέτουμε

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Να δειχθεί ότι

(α) $E(\overline{X}) = \mu, V(\overline{X}) = \sigma^2/n$.

(β) $E(S^2) = \sigma^2$.

19. Σε ένα παιχνίδι ο παρουσιαστής μοιράζει τυχαία σε τρία κουτιά Α, Β, Γ, τρείς φακέλους 1, 2, 3. Ο 1 λέει ότι ο παίκτης πρέπει να πληρώσει 5 Ευρώ, ο 2 ότι πρέπει να πληρώσει 6 Ευρώ, ο 3 λέει ότι ο παίκτης κερδίζει ένα αυτοκίνητο. Ο παίκτης επιλέγει ένα από τα τρία κουτιά Α, Β, Γ, με πιθανότητα 1/3 το καθένα, και ακολουθεί την εντολή που λέει ο φάκελος που περιέχεται στο κουτί. Στόχος του είναι να βρεί τον φάκελο 3, οπότε μετά από κάθε αποτυχημένη προσπάθεια ξαναπαίζει το παιχνίδι. Βέβαια ο παρουσιαστής ξαναμοιράζει τους φακέλους στα κουτιά. Έστω X το ποσό που θα πληρώσει ο παίκτης ώσπου να βρεί τον φάκελο 3 (προφανώς η X είναι τυχαία μεταβλητή). Να βρεθεί η $E(X)$.

20. Ένα νόμισμα έχει πιθανότητα p να φέρει γράμματα (Γ) σε μία ρίψη. Το ρίχνουμε συνεχώς ώσπου να εμφανιστούν και οι δύο διαφορετικές ενδείξεις Κ, Γ. Να βρεθούν:

(α) Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων

(β) Η πιθανότητα η τελευταία ρίψη να είναι Κ.

21. Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, και στον ίδιο χώρο πιθανότητας μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή R τέτοια ώστε

$$P(R=1) = P(R=-1) = 1/2$$

(δηλαδη η R ακολουθεί την κατανομή $\text{Bernouli}(1/2)$ στο $\{-1,1\}$). Θέτουμε $Y = RX$.

(α) Να δειχθεί ότι η Y ακολουθεί επίσης την κανονική κατανομή.

(β) Να δειχθεί ότι $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

(γ) Είναι οι X, Y είναι ανεξάρτητες;

(δ) Είναι η (X,Y) διδιάστατη κανονική κατανομή;

(ε) Ποιά είναι η κατανομή της $X+Y$; Αντιβαίνει αυτό στο Πόρισμα 6.3.1 (α);

22. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) με $E(X^2), E(Y^2) < \infty$. Να δειχθεί ότι

(α) $E(XY) = E(XE(Y \mid X))$.

(β) $\text{Cov}(X, E(Y \mid X)) = \text{Cov}(X,Y)$.

23. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0,1)$.

(α) Για $n \geq 1$ και $x \in (0,1]$, να υπολογιστεί η πιθανότητα

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x).$$

(β) Για $x \in (0,1]$, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$N_x := \min\{n \geq 1 : X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x\}.$$

Να βρεθεί η $E(N_x)$.

24. Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim U(0,1), Y \sim \exp(1), Z \sim \exp(1)$. Να δειχθεί ότι η πιθανότητα η εξίσωση $Xt^2 + \sqrt{Y}t + Z = 0$, να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες είναι $(\log 5)/4$.

25. Μία κάλπη περιέχει αρχικά a άσπρες και b μαύρες μπάλες. Εξάγουμε τυχαία μία μπάλα, και αν είναι άσπρη την επιστρέφουμε στην κάλπη, ενώ αν είναι μαύρη την αντικαθιστούμε με μία άσπρη που παίρνουμε από μιά άλλη κάλπη. Έστω X_n το πλήθος των άσπρων μπαλών όταν η προηγούμενη διαδικασία πραγματοποιηθεί n φορές.

(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$E(X_n \mid X_{n-1}) = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) X_{n-1} + 1.$$

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$E(X_n) = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n.$$

(γ) Ποιά είναι η πιθανότητα η μπάλα που επιλέγουμε κατά το $n+1$ βήμα να είναι άσπρη;

26. Ένα μηχάνημα μας δίνει ένα νόμισμα που φέρνει Κ με τυχαία πιθανότητα p. Το p είναι άγνωστο σε μας, αλλά ξέρουμε από πολλές παρατηρήσεις των νομισμάτων που εξάγει η μηχανή ότι η κατανομή της τυχαίας παραμέτρου p είναι η ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Ρίχνουμε το νόμισμα δύο φορές. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

(α) Στην πρώτη ρίψη το νόμισμα φέρνει Κ.

(β) Και στις δύο ρίψεις το νόμισμα φέρνει Κ.

27. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = ce^{-(x^2-xy+4y^2)/2}$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε η f να είναι η πυκνότητα μιας διδιάστατης κανονικής τυχαίας μεταβλητής (X,Y) και για αυτήν την τιμή του c, να υπολογιστούν τα $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{X,Y}$.

Απαντήσεις

1. (α) Για το μετασχηματισμό $T(x, y) := (x+y, x-y)$, έχουμε $(U, V) = T(X, Y)$, και $T^{-1}(u, v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$. Ο T^{-1} έχει ιακωβιανή

$$J_{T^{-1}}(u, v) = -1/2.$$

Άρα με βάση γνωστό θεώρημα[1], έχουμε

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u, v))|J_{T^{-1}}(u, v)|,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

(β) Στον τύπο από το (α), χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των X, Y, και αντικαθιστώντας την πυκνότητα τους, βρίσκουμε

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\, e^{-\frac{u^2}{4}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\, e^{-\frac{v^2}{4}}$$

το οποίο είναι το γινόμενο $g(u)g(v)$ με την g να είναι η πυκνότητα της $N(0, 2)$. Έτσι προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

(γ) Όμοια όπως στο (β), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\left(\frac{u+v}{2}\right)} \mathbf{1}_{\frac{u+v}{2}>0} \lambda e^{-\lambda\left(\frac{u-v}{2}\right)} \mathbf{1}_{\frac{u-v}{2}>0} = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u+v>0} \mathbf{1}_{u-v>0} \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0, -u<v<u}. \end{aligned}$$

Βοηθάει να κάνει κανείς ένα σχήμα για το χωρίο $\{(u, v) : u+v > 0, u-v > 0\}$. Οι περιθώριες είναι

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u, v)\, dv = \begin{cases} 0 & \text{αν } u \le 0 \\ \frac{\lambda^2}{2} \int_{-u}^{u} e^{-\lambda u}\, dv = \lambda^2 u e^{-\lambda u} & \text{αν } u > 0 \end{cases} = \lambda^2 u e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{u>0}$$

και όμοια (παίρνοντας περιπτώσεις $v \ge 0, v < 0$) βρίσκουμε

$$f_V(v) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|v|}$$

για κάθε $v \in \mathbb{R}$. Προφανώς $f_{U,V}(u, v) \neq f_U(u) f_V(v)$, οπότε οι U, V δεν είναι ανεξάρτητες.

2. (α) Για το μετασχηματισμό $T(x, y) := (x+y, x/y)$, έχουμε $(U, V) = T(X, Y)$, και $T^{-1}(u, v) = (uv/(v+1), u/(v+1))$. Ο T^{-1} έχει ιακωβιανή

$$J_{T^{-1}}(u, v) = -\frac{u}{(v+1)^2}.$$

Άρα έχουμε

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u, v))|J_{T^{-1}}(u, v)| = \lambda^2 u e^{-\lambda u} \frac{1}{(v+1)^2} \mathbf{1}_{u,v>0}.$$

Επειδή η πυκνότητα $f_{U,V}$ γράφεται ως γινόμενο $g(u)h(v)$, έπεται ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες.

[1] Πρόταση 4.1.1 στο βιβλίο του κ. Κούτρα.

(β)

$$f_V(v) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,du = \ldots = \frac{1}{(v+1)^2}\mathbf{1}_{v>0}.$$

3. Για το μετασχηματισμό $T(x,y) := (x/(x+y), x+y)$, έχουμε $(U,V) = T(X,Y)$, και $T^{-1}(u,v) = (uv, v(1-u))$. Ο T^{-1} έχει ιακωβιανή

$$J_{T^{-1}}(u,v) = v.$$

Άρα όπως στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|J_{T^{-1}}(u,v)| = \ldots = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1}v^{a+b-1}e^{-v}\mathbf{1}_{u\in(0,1)}\,\mathbf{1}_{v>0}.$$

Η από κοινού των U,V είναι γινόμενο $g(u)h(v)$, από όπου προκύπτει η ανεξαρτησία των U,V. Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$B(a,b) := \int\limits_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

υπολογίζουμε τις περιθώριες των U,V, και προκύπτει το ζητούμενο.

4. Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο[2]

$$f_{X+Y}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx = \int\limits_{-2}^{3} \frac{1}{5}e^{-(z-x)}\mathbf{1}_{z-x>0}\,dx = e^{-z}\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{3} e^x\mathbf{1}_{x<z}\,dx,$$

το οποίο είναι 0 για $z \le -2$, ενώ για $z > -2$ ισούται με

$$e^{-z}\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{3\wedge z} e^x\,dx = \frac{1}{5}(e^{(3-z)\wedge 0} - e^{-z-2}).$$

5. Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο[3]

$$f_{XY}(u) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_X(u/y)f_Y(y)\,\frac{1}{|y|}\,dy.$$

Οι f_X, f_Y είναι μη μηδενικές μόνο στο $(0,1)$, και έτσι προκύπτει ότι για $u \notin (0,1)$ ισχύει $f_{XY}(u) = 0$, γιατί για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τουλάχιστον ένας από τους $u/y, y$ θα είναι εκτός του $(0,1)$. Για $u \in (0,1)$ το πιο πάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\limits_{\substack{0<u/y<1\\0<y<1}} f_X(u/y)f_Y(y)\,\frac{1}{y}\,dy = \int\limits_u^1 \frac{1}{y}\frac{1}{B(a,b)}\left(\frac{u}{y}\right)^{a-1}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{b-1}\frac{1}{B(a+b,c)}y^{a+b-1}(1-y)^{c-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{B(a,b)}\frac{1}{B(a+b,c)}u^{a-1}\int\limits_u^1 (y-u)^{b-1}(1-y)^{c-1}\,dy.$$

[2] Πρόταση 4.2.1 στο βιβλίο του κ. Κούτρα.

[3] Πρόταση 4.2.4 στο βιβλίο του κ. Κούτρα.

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, εισάγουμε νέα μεταβλητή, την s, θέτοντας $y=(1-u)s+u$, ώστε να προκύψει ολοκλήρωμα με άκρα 0, 1, και μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$f_{XY}(u)=\frac{1}{B(a,b+c)}u^{a-1}(1-u)^{b+c-1}.$$

6. (α) Αυτό που είναι εύκολο να υπολογίσουμε είναι για $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y$, την πιθανότητα

$$P(x<X_{(1)},X_{(n)}\le y)=P(X_1\in(x,y])P(X_2\in(x,y])\cdots P(X_n\in(x,y])=(F(y)-F(x))^n.$$

Για τα ίδια x,y, έχουμε

$$F(x,y)=P(X_{(1)}\le x,X_{(n)}\le y)=P(X_{(n)}\le y)-P(X_{(1)}>x,X_{(n)}\le y)=(F(y))^n-(F(y)-F(x))^n.$$

Για $x\ge y$, $F(x,y)=P(X_{(1)}\le x,X_{(n)}\le y)=P(X_{(n)}\le y)=(F(y))^n$. Άρα

$$F(x,y)=\begin{cases}(F(y))^n-(F(y)-F(x))^n & \text{αν } x<y,\\ (F(y))^n & \text{αν } x\ge y.\end{cases}$$

(β) Βρίσκουμε την υποψήφια πυκνότητα παραγωγίζοντας ως προς x και μετά ως προς y την συνάρτηση κατανομής. Εκτός από πεπερασμένα x,y έχουμε

$$h(x,y):=\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}(x,y)=n(n-1)(F(y)-F(x))^{n-2}f(x)f(y)\,\mathbf{1}_{x<y}.$$

Τώρα πρέπει να ελέγξουμε αν

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}h(s,t)\,ds\,dt=F(x,y)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Όντως, για $x<y$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}h(s,t)\,ds\,dt=&n(n-1)\int_{-\infty}^{x}\int_{s}^{y}(F(t)-F(s))^{n-2}f(t)f(s)\,dt\,ds\\ =&n\int_{-\infty}^{x}f(s)(F(t)-F(s))^{n-1}\Big|_{t=s}^{t=y}ds=n\int_{-\infty}^{x}f(s)(F(y)-F(s))^{n-1}\,ds\\ =&-(F(y)-F(s))^n\Big|_{s=-\infty}^{s=x}=(F(y))^n-(F(y)-F(x))^n.\end{aligned}$$

Όμοια δουλεύουμε και όταν $x\ge y$.

(γ) Από το (β), στην περίπτωση της ομοιόμοφης $U(0,a)$, η από κοινού πυκνότητα των $X_{(1)},X_{(n)}$ είναι η

$$f(x,y)=n(n-1)\,a^{-n}(y-x)^{n-2}\mathbf{1}_{0<x<y<a}.$$

Για την εύρεση της πυκνότητας της διαφοράς τους $R:=X_{(n)}-X_{(1)}$, χρησιμοποιούμε το ανάλογο της πρότασης 4.2.3 (σελίδα 155) για εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές (απόδειξη ίδια). Για $r\in(0,a)$ υπολογίζουμε

$$f_R(r)=\int_{\mathbb{R}}f(x,r+x)\,dx=n(n-1)\,a^{-n}\int_0^{a-r}r^{n-2}\,dx==n(n-1)\,a^{-n}(a-r)r^{n-2},$$

ενώ για $r \in \mathbb{R} \setminus (0, a)$ βρίσκουμε $f_R(r) = 0$. Άρα

$$f_R(r) = n(n-1)a^{-n}r^{n-2}(a-r)\,\mathbf{1}_{0<r<a}.$$

Τώρα η μέση τιμή της R υπολογίζεται εύκολα.

7. Έστω f_X η πυκνότητα της X. Εύκολα βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι $f_Y(y) = \frac{1}{r} f_X(\frac{y}{r})$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την f_X (δηλαδή $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$), βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι αυτή της $\Gamma(a, \lambda/r)$.

8. (α) Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της $-\log X_1$ είναι η $F(t) = (1 - e^{-t})\,\mathbf{1}_{t>0}$ που είναι αυτή της εκθετικής με παράμετρο 1. Άρα $-\log X_1 \sim \exp(1) = \Gamma(1, 1)$.

(β) Λόγω του (α), έχουμε ότι η Y είναι άθροισμα ανεξάρτητων Γάμμα με κοινή δεύτερη παράμετρο. Άρα η κατανομή της είναι $\Gamma(1 + 1 + \cdots + 1, 1) = \Gamma(n, 1)$.

(γ) Έπεται από το (β) και την Άσκηση 7 ότι η Y ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n, 1/2)$ η οποία είναι η χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας.

9. 1ος τροπος. Έστω η ευθεία $\Delta := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή η διχοτόμος του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου (λέγεται και διαγώνιος του $\mathbb{R}^2$). Τότε

$$P(X = Y) = P((X, Y) \in \Delta) = \iint\limits_{\Delta} f(x, y)\, dxdy = 0$$

γιατί είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε μια γραμμή (η οποία έχει εμβαδόν 0).

2ος τροπος. Ξέρουμε ότι για δεδομένο $y \in \mathbb{R}$, η κατανομή της $X \,|\, Y = y$ είναι συνεχής με πυκνότητα την οποία συμβολίζουμε με $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$. Τότε

$$P(X = Y) = \int P(X = Y \,|\, Y = y) f_Y(y)\, dy = 0$$

γιατί για κάθε δεδομένο y, $P(X = Y \,|\, Y = y) = P(X = y \,|\, Y = y) = \int_y^y f_{X\,|\,Y}(x \,|\, y)\, dx = 0$ (ολοκλήρωμα πάνω σε ένα σημείο, το y).

10. Έστω

$$A_0 := \{\text{κάποιες από τις } X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ είναι ίσες}\}.$$

Τότε από την προηγούμενη άσκηση,

$$P(A_0) \le \sum_{1 \le i,j \le 4, i \ne j} P(X_i = X_j) = 0.$$

Τώρα, για οποιαδήποτε μετάθεση (i_1, i_2, i_3, i_4) των $\{1, 2, 3, 4\}$ ισχύει

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}) = P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4) \tag{1}$$

γιατί η (τετραδιάστατη) τυχαία μεταβλητή $(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, X_{i_4})$ έχει την ίδια κατανομή με την (X_1, X_2, X_3, X_4). Έχουν και οι δυό πυκνότητα $\tilde{f}(x, y, z, w) = f(x)f(y)f(z)f(w)$. [Ένα ανάλογο και απλούστερο σενάριο. Ρίχνουμε ένα ζάρι 5 φορές και γράφουμε τα αποτελέσματα με την σειρά με την οποία εμφανίζονται. Η πιθανότητα να φέρουμε (6, 3, 6, 2, 5) είναι η ίδια με το να φέρουμε (3, 6, 6, 5, 2)]

Έστω S_4 το σύνολο των μεταθέσεων των $\{1,2,3,4\}$. Επειδή

$$\Omega = A_0 \cup \bigcup_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in S_4} \{X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}\}$$

είναι ένωση ξένων ανά δύο συνόλων (διαμέριση του Ω), και $P(A_0) = 0$ (έλλειψη ισοπαλιών), έπεται λόγω της (1) ότι

$$1 = |S_4| \times P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4) = 4! P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4),$$

δηλαδή το ζητούμενο.
Όταν έχουμε n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνεχή κατανομή, τότε

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}) = \frac{1}{n!}$$

για κάθε μετάθεση $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ των $\{1, 2, \cdots, n\}$.

11. Επειδή η Cov είναι διγραμμική, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(XZ^2, Y+Z) &= \mathrm{Cov}(XZ^2, Y) + \mathrm{Cov}(XZ^2, Z) \\
&= E(XYZ^2) - E(XZ^2)E(Y) + E(XZ^3) - E(XZ^2)E(Z) \\
&= E(Z^2)\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) + E(X)E(Z^3) - E(XZ^2)E(Z) \\
&= \mathrm{Cov}(X,Y) = 1.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία της Z από τις X, Y και το ότι $E(Z) = E(Z^3) = 0, E(Z^2) = V(Z) = 1$. Ο ισχυρισμός $E(Z^3) = 0$ προκύπτει από το ότι το

$$E(Z^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2/2}\, dx$$

είναι ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε χωρίο συμμετρικό γύρω από το 0.

12. Η διασπορά καθεμίας από τις X_1, X_2 είναι μ^2. Θα χρησιμοποιήσουμε πιο κάτω ότι λόγω ανεξαρτησίας έχουμε $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) &= 2\mathrm{Cov}(X_1,X_1) + 3\mathrm{Cov}(X_1,X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_2,X_1) + 3\mathrm{Cov}(X_2,X_2) \\
&= 2\mu^2 + 0 + 0 + 3\mu^2 = 5\mu^2.
\end{aligned}$$

Έπειτα, $V(2X_1+3X_2) = V(2X_1) + V(3X_2) + 6\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 13\mu^2$. Όμοια, $V(X_1+X_2) = 2\mu^2$. Έπεται ότι $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = ... = 5/\sqrt{26}$.
Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2$ δεν είναι ανεξάρτητες γιατί έχουν συνδιακύμανση διαφορετική απο το 0.

13. (α) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
V(X_1+X_2) &= V(X_1) + V(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\sqrt{V(X_1)V(X_2)}\rho_{X_1,X_2} \\
&= 3 + 2 + 2\sqrt{6}\rho_{X_1,X_2}.
\end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή του ρ_{X_1,X_2} είναι 1 και η ελάχιστη -1. Άρα

$$V(X_1+X_2) \in [5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}].$$

Ένα σενάριο το οποίο πετυχαίνει την μέγιστη τιμή είναι το $X_2 = \sqrt{2/3}X_1$ (δηλαδή η X_1 δεδομένη με διασπορά 3 και η X_2 ορισμένη μέσω της X_1). Αυτό όντως έχει $V(X_2) = 2$. Τότε $X_1 + X_2 = (1 + \sqrt{2/3})X_1$ με διασπορά

$$(1 + \sqrt{2/3})^2 V(X_1) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Πως το σκεφτήκαμε αυτό το σενάριο; Ξέρουμε ότι μέγιστο συντελεστή συσχέτισης έχουμε όταν η X_2 είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο της X_1 (και έπειτα μια μετατόπιση, αν θέλουμε). Παίρνουμε λοιπόν $X_2 = aX_1$. Το $a > 0$ όμως δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε γιατί πρέπει $V(X_2) = 2$, δηλαδή $2 = a^2 V(X_1)$. Έτσι βρίσκουμε $a = \sqrt{2/3}$.
Όμοια, ένα σενάριο που πετυχαίνει την ελάχιστη τιμή είναι το $X_2 = -\sqrt{2/3}X_1$.

(β) Όταν $\rho_{X_1,X_2} = 1$, τότε πρέπει $X_2 = aX_2 + b$ για κάποιες σταθερές $a > 0, b$. Και επειδή $V(X_1) = 3, V(X_2) = 2$ έπεται ότι $a = \sqrt{2/3}$. Άρα για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε ένα σενάριο που πετυχαίνει το μέγιστο, δηλαδή

$$X_2 = \sqrt{2/3}X_1 + b.$$

Και αυτά είναι τα μόνα σενάρια που το πετυχαίνουν. Όμοια, τα σενάρια για το ελάχιστο είναι τα

$$X_2 = -\sqrt{2/3}X_1 + b$$

όπου $b \in \mathbb{R}$. Κάθε b δίνει ένα σενάριο.

14. (α) Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή Z, ανεξάρτητη της X, με διασπορά 1. Για $r \in [0, 1]$ θέτουμε $Y := \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}\sqrt{a}Z$. Τότε λόγω ανεξαρτησίας,

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(\sqrt{1-r}X) + V(\sqrt{r}\sqrt{a}Z) = (1-r)a + ra = a, \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X, \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}\sqrt{a}Z) = a\sqrt{1-r}, \\ \rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \sqrt{1-r}. \end{aligned}$$

Για δεδομένο $c \in [0, 1]$, επιλέγουμε r έτσι ώστε $\sqrt{1-r} = c$.

(β) Από το (α), βρίσκουμε μία $\hat{Y}$ με $\rho(X, \hat{Y}) = -c$. Η $Y := -\hat{Y}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

15. (α) Προφανώς οι δυνατές τιμές της Y είναι τα στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$. Για k σε αυτό το σύνολο έχουμε

$$f_Y(k) := P(Y = k) = \sum_{j=1}^{n} P(Y = k \,|\, X = j)P(X = j).$$

Αν $k \neq 1, 2, n-1, n$, τότε στο παραπάνω άθροισμα μη μηδενικοί είναι ακριβώς οι όροι που αντιστοιχούν στα $j = k-1, k+1$ (για να πάρει η Y την τιμή k πρέπει η X να βρεθεί σε απόσταση 1 από το k δεξιά ή αριστερά), και αν $X = k-1$ ή $X = k+1$, η πιθανότητα να έχουμε $Y = k$ είναι $1/2$ γιατί τα $k-1, k+1$ έχουν δύο γείτονες. Άρα

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Τώρα αν $k \in \{2, n-1\}$, π.χ., $k = 2$, από τον ορισμό της Y υπολογίζουμε

$$P(Y = 2) = P(Y = 2 \,|\, X = 1)P(X = 1) + P(Y = 2 \,|\, X = 3)P(X = 3) = 1 \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \frac{3}{2n}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι το 3 έχει δύο γείτονες, αφού $n \geq 4$. Τέλος, υπολογίζουμε όμοια ότι

$$P(Y=1) = P(Y=n) = \frac{1}{2n}.$$

Άρα οι μάζες που δίνει η κατανομή της Y στα σημεία $1, 2, \ldots, n-1, n$ είναι αντίστοιχα

$$\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{3}{2n}, \frac{1}{2n}.$$

(β) Περιμένουμε η συνδιακύμανση να έχει θετικό πρόσημο γιατί σε μία πραγματοποίηση των X, Y, "μεγάλη" τιμή της X (δηλαδή πάνω από την μέση της τιμή) συνεπάγεται και "μεγάλη" τιμή της Y αφού η X την συμπαρασύρει. Όμοια, μικρή τιμή της X συνεπάγεται μικρή τιμή και για την Y.

(γ) Η X κατανέμεται ομοιόμορφα στο $\{1, 2, \ldots, n\}$, άρα $E(X) = (n+1)/2$. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) μπορεί να δει κανείς ότι $E(Y) = (n+1)/2$. Εναλλακτικά, αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο γιατί η Y έχει συμμετρική κατανομή. Αυτό το χρησιμοποιούμε ως εξής. Η Y έχει την ίδια κατανομή με την $n+1-Y$ (εδώ μπαίνει η συμμετρία), άρα $E(Y) = E(n+1-Y) = n+1-E(Y)$, το οποίο δίνει $E(Y) = (n+1)/2$.

Μένει να υπολογίσουμε την μέση τιμή $E(XY)$. Μπορεί κανείς να το κάνει όπως στην άσκηση 4(β) του πρώτου φυλλαδίου (εκεί απλώς ήταν συνεχείς τυχαίες μεταβλητές) βρίσκοντας πρώτα την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y. Εναλλακτικά, δεσμεύουμε ως προς X μιας και η Y ορίζεται αφού επιλεγεί η X. Δηλαδή

$$E(XY) = E(E(XY \,|\, X)) = E(m(X))$$

με $m(k) = E(XY \,|\, X=k) = kE(Y \,|\, X=k)$ για $k = 1, 2, \ldots, n$. Εύκολα έχουμε

$$m(k) = \begin{cases} k \times k = k^2 & \text{αν } k \in \{2, 3, \ldots, n-2, n-1\}, \\ 1 \times 2 & \text{αν } k = 1, \\ n \times (n-1) & \text{αν } k = n. \end{cases}$$

Άρα

$$E(m(X)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} k^2 + \frac{1}{n}(1 \times 2 + n \times (n-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n} - 1,$$

και

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \cdots = \frac{n^2 - 13}{12} + \frac{1}{n}.$$

16. Χρησιμοποιούμε το ότι αν το C είναι ενδεχόμενο στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, και $\mathbf{1}_C : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η δείκτρια του, τότε

$$E(\mathbf{1}_C) = P(C).$$

Αυτό γιατί η $\mathbf{1}_C$ παίρνει την τιμή 1 στο σύνολο C και την τιμή 0 στο $\Omega \setminus C$. Άρα

$$E(\mathbf{1}_C) = 1 \times P(C) + 0 \times P(\Omega \setminus C) = P(C).$$

Επίσης $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}$. Άρα

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= E(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_{A \cap B}) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B). \end{aligned}$$

17. (α)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_i) = P(X_i = X_j = 1) - P(X_i = 1)P(X_j = 1)\\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{(n-1)!}{n!}\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.\end{aligned}$$

Κάποιες εξηγήσεις για τον υπολογισμό. Η τυχαία μεταβλητή X_iX_j παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, και την τιμή 1 την παίρνει ακριβώς όταν και η X_i και η X_j ισούνται με 1. Οπότε

$$E(X_iX_i) = 0 \times P(X_iX_j = 0) + 1 \times P(X_iX_j = 1) = P(X_i = X_j = 1).$$

Όμοια δικαιολογούμε και την $E(X_i) = P(X_i = 1)$. Τα υπόλοιπα είναι συνδυαστική (ευνοϊκές δια δυνατές περιπτώσεις...).

Άρα οι X_i, X_j είναι θετικά συσχετισμένες. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί όταν η X_i παίρνει μεγάλη τιμή (δηλαδή 1) είναι πιο πιθανό και η X_j να πάρει επίσης μεγάλη τιμή. Αν ο επιβάτης i καθίσει στην σωστή θέση, μειώνει τις λάθος επιλογές για τον j, και έτσι τον βοηθάει να καθίσει και αυτός στην θέση που του αναλογεί. Ομοίως, όταν η X_i παίρνει μικρή τιμή (δηλαδή 0) είναι πιο πιθανό και η X_j να πάρει επίσης μικρή τιμή. Αν ο επιβάτης i καθίσει σε λάθος θέση, ενδεχομένως να καθίσει σε αυτήν του j και έτσι να επιβάλει $X_j = 0$.

(β) Θα χρειαστούμε το ότι για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$V(X_i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

που ισχύει γιατί η X_i παίρνει μόνο τιμές 0 και 1, οπότε $X_i^2 = X_i$ και

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = E(X_i) - (E(X_i))^2 = (1/n) - (1/n)^2.$$

Επειδή

$$W := \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{2}$$

χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της μέσης τιμής και την διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης, βρίσκουμε

$$E(W) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

και

$$\begin{aligned}V(W) = \mathrm{Cov}(W, W) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i)\\ = nV(X_1) + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1\end{aligned}$$

Σχόλιο: Θα μπορούσε κανείς να βρει πρώτα την κατανομή της W, δηλαδή τις τιμές $P(W = k)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, και μετά τις $E(W), V(W)$. Αυτό όμως δεν είναι απλή υπόθεση (προκύπτει από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Ο υπολογισμός αυτός βρίσκεται στο Παράδειγμα 1.21, σελ. 53, στο βιβλίο του κ. Χαραλαμπίδη, Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές). Προσέξτε πως η γραφή (2) και οι ιδιότητες των E, Cov κάνουν τον υπολογισμό της $E(W)$ τετριμμένο, και αυτόν της $V(W)$ εύκολο.

18. (α) Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}(EX_1 + \cdots + EX_n) = \mu,$$

και επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες, έχουμε

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \cdots + V(X_n)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu - (\overline{X} - \mu))^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\overline{X} - \mu) + n(\overline{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2n(\overline{X} - \mu)^2 + n(\overline{X} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2.\end{aligned}$$

Τώρα παίρνοντας μέσες τιμές, και χρησιμοποιώντας το ότι $E(X_i) = E(\overline{X}) = \mu$ για κάθε i, έχουμε

$$(n-1)\,E(S^2) = n\sigma^2 - nV(\overline{X}) = n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2,$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο.

19. Έστω Y ο αριθμός του φακέλου που επιλέγει ο παίκτης την πρώτη φορά που παίζει το παιχνίδι. Τότε

$$\begin{aligned}E(X) &= E(E(X \mid Y)) \\ &= E(X \mid Y=1)P(Y=1) + E(X \mid Y=2)P(Y=2) + E(X \mid Y=3)P(Y=3) \\ &= \frac{1}{3}\big\{E(X \mid Y=1) + E(X \mid Y=2) + E(X \mid Y=3)\big\}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}E(X \mid Y=1) &= 5 + E(X), \\ E(X \mid Y=2) &= 6 + E(X), \\ E(X \mid Y=3) &= 0.\end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση ισχύει γιατί δεδομένου ότι ο παίκτης διάλεξε τον φάκελο 1, πλήρωσε 5 Ευρώ, δεν βρήκε το αυτοκίνητο, και η διαδικασία αρχίζει από την αρχή. Μάλιστα η κατανομή της $X \mid Y = 1$ είναι ακριβώς η ίδια με $5+X'$, όπου X' είναι το κόστος που θα πληρώσει ο παίκτης ώσπου να βρεί το αυτοκίνητο αν του χαριστεί η πρώτη μαντεψιά που είδαμε ήδη ότι είναι αποτυχημένη. Προφανώς η X' έχει την ίδια κατανομή με την X (απλως το παιχνίδι ξαναρχίζει).

Όμοια δικαιολογούμε και την δεύτερη εξίσωση, ενώ η τρίτη προκύπτει γιατί όταν $Y = 3$, ο παίκτης βρήκε το αυτοκίνητο και σταματάει να παίζει. Έτσι η εξίσωση (3) δίνει

$$E(X) = \frac{2}{3}E(X) + \frac{11}{3}.$$

Επομένως $E(X) = 11$.

20. (α) Έστω X ο αριθμός ρίψεων μέχρι την εμφάνιση και των δύο ενδείξεων, και η τυχαία μεταβλητή

$$Y := \begin{cases} 0 & \text{αν η πρώτη ρίψη είναι Γ,} \\ 1 & \text{αν η πρώτη ρίψη είναι Κ.} \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X \,|\, Y)) = p\,E(X \,|\, Y=0) + (1-p)\,E(X \,|\, Y=1) \\ &= p(1+(1-p)^{-1}) + (1-p)(1+p^{-1}) = 1 + \frac{1}{p(1-p)}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι η κατανομή της $X \,|\, Y=0$ είναι η ίδια με αυτή της $1+Z$, όπου η Z είναι ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη εμφάνιση της ένδειξης Κ σε μία άλλη ακολουθία ρίψεων με το ίδιο νόμισμα. Η κατανομή της Z είναι γεωμετρική με παράμετρο $1-p$ (συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(k) = (1-p)p^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$). Ανάλογα αντιμετωπίζουμε την $E(X \,|\, Y=1)$.

(β) Η τελευταία ρίψη είναι Κ, αν και μόνο αν η πρώτη ρίψη είναι Γ, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα p.

21. (α) Για $A \subset \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμο έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(R=1)P(Y \in A \,|\, R=1) + P(R=-1)P(Y \in A \,|\, R=-1) \\ &= \frac{1}{2}(P(X \in A \,|\, R=1) + P(-X \in A \,|\, R=-1)) \\ &= \frac{1}{2}(P(X \in A) + P(-X \in A)) = \frac{1}{2}(P(X \in A) + P(X \in -A)) \\ &= P(X \in A). \end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X, R, ενώ στην τελευταία χρησιμοποιήσαμε το ότι η πυκνότητα της X είναι άρτια συνάρτηση.

(β) Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των X, R παίρνουμε

$$E(XY) = E(RX^2) = E(R)E(X^2) = 0,$$

και $E(Y) = E(RX) = E(R)R(X) = 0$. Άρα $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

(γ) Προφανώς δεν είναι ανεξάρτητες. Ένας τρόπος να το δούμε είναι ο εξής.

$$P(X \in (0,1), Y \in (3,4)) = P(X \in (0,1), RX \in (3,4)) = 0$$

γιατί η R παίρνει τιμές $-1, 1$ οπότε $RX \in (3,4) \Rightarrow |X| \in (3,4)$, το οποίο είναι ασύμβατο με το $X \in (0,1)$. Ενώ βέβαια

$$P(X \in (0,1))P(Y \in (3,4)) \neq 0$$

γιατί η πυκνότητα της κανονικής είναι θετική και στα δύο διαστήματα $(0,1), (3,4)$.

(δ) Δεν είναι διδιάστατη κανονική γιατί τότε λόγω του (β) έπρεπε οι X, Y να είναι ανεξάρτητες. Όμως στο (γ) δείξαμε ότι δεν είναι.

(ε) Έστω $A \subset \mathbb{R}$ σύνολο Borel. Τότε

$$\begin{aligned} P(X+Y\in A) &= P(X(1+R)\in A) \\ &= P(X(1+R)\in A \,|\, R=-1)P(R=-1) + P(X(1+R)\in A \,|\, R=1)P(R=1) \\ &= \frac{1}{2}\big(P(0\times X\in A \,|\, R=-1) + P(2X\in A \,|\, R=1)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(P(0\times X\in A) + P(2X\in A)\big) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_A(0) + \int_A f_Z(x)\,dx\right). \end{aligned}$$

Θέσαμε $Z := 2X \sim N(0,4)$, και f_Z είναι η πυκνότητα της. Επίσης $\mathbf{1}_A$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A. Στην τέταρτη ισότητα πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X, R, και έφυγε έτσι η δέσμευση (αφού όμως πρώτα την χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη γραμμή).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $X+Y$ έχει μικτή κατανομή, η οποία έχει μάζα $1/2$ στο 0 (διακριτό μερος της κατανομής), ενώ η υπόλοιπη μάζα σκορπίζεται με συνεχή τρόπο, με πυκνότητα $(1/2)f_Z$ (συνεχές μέρος).

Δηλαδή η $X+Y$ δεν ακολουθεί κάποια κανονική κατανομή. Αυτό δεν αντιβαίνει στο Πόρισμα 6.3.1 (α), γιατί όπως είδαμε στο (δ), η (X,Y) δεν ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή.

22. (α) $E(XY) = E(E(XY\,|\,X)) = E(m(X))$ όπου $m(x) = E(XY\,|\,X=x)$ για κάθε x με $f_X(x) > 0$. Έστω επίσης $\hat{m}(x) = E(Y\,|\,X=x)$. Όπως δείξαμε στην τάξη, και είναι διαισθητικά προφανές, ισχύει

$$m(x) = E(XY\,|\,X=x) = E(xY\,|\,X=x) = x\,E(Y\,|\,X=x) = x\,\hat{m}(x).$$

Οπότε $E(XY) = E(m(X)) = E(X\hat{m}(X)) = E(XE(Y\,|\,X))$.

(β) Χρησιμοποιούμε το ερώτημα (α), και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, E(Y\,|\,X)) &= E(XE(Y\,|\,X)) - E(X)E(E(Y\,|\,X)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) = \mathrm{Cov}(X,Y). \end{aligned}$$

23.(α) Για $k \geq 1$ ακέραιο και $x \in [0,\infty)$ θέτουμε

$$\begin{aligned} S_k &:= X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \\ h_k(x) &= P(S_k \leq x). \end{aligned}$$

Για $x \in [0,1]$, έχουμε $f_1(x) = P(X_1 \leq x) = x$ αφού η X_1 έχει την ομοιόμορφη κατανομή. Τώρα, για $k \geq 2$ και $x \in [0,1]$, έχουμε (δεσμέυουμε ως προς την τιμή του X_1)

$$h_k(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq x) = \int_0^x P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq x \,|\, X_1 = z) f_{X_1}(z)\,dz$$

$$= \int_0^x P(X_2 + \cdots + X_k \leq x - z \,|\, X_1 = z) f_{X_1}(z)\,dz = \int_0^x P(X_2 + \cdots + X_k \leq x - z)\,dz$$

$$= \int_0^x h_{k-1}(x-z)\,dz.$$

Στην πρώτη γραμμή είναι κρίσιμο το ότι $x \le 1$, οπότε το άκρο ολοκλήρωσης είναι x. Αν είχαμε $x > 1$, τότε το άκρο θα ήταν 1 γιατί αυτή είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η X_1. Στην δεύτερη γραμμή, χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία της X_1 από τις $X_2, \ldots, X_k$. Στην τρίτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε το ότι η $X_2 + + \cdots + X_k$ έχει την ίδια κατανομή με την $X_1 + \cdots + X_{k-1}$. Άρα $P(X_2 + \cdots + X_k \le x - z) = P(X_1 + \cdots + X_{k-1} \le x - z) = h_{k-1}(x)$.
Η πιό πάνω αναδρομική σχέση για την h_k μαζί με την $h_1(x) = x$ για $x \in [0,1]$ δίνουν με επαγωγή ότι $h_k(x) = x^k/k!$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Η N_x παίρνει τιμές στους θετικούς ακέραιους, οπότε από γνωστό τύπο έχουμε

$$E(N_x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N_x \ge k).$$

Τώρα, για $k \ge 2$ και μία δεδομένη πραγματοποίηση της ακολουθίας $(X_i)_{i\ge1}$, $N_x \ge k$ σημαίνει ότι οι πρώτες $k-1$ τυχαίες μεταβλητές X_i δεν αρκούν ώστε το άθροισμα τους να ξεπεράσει το x. Αυτό ισοδυναμεί με $X_1 + \cdots + X_{k-1} \le x$. Το τελευταίο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα $x^{k-1}/(k-1)!$ από το ερώτημα (α). Για $k = 1$, προφανώς $P(N_x \ge 1) = 1 = x^0/0!$. Άρα

$$E(N_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x.$$

24. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι θετική.

$$\begin{aligned}
P((\sqrt{Y})^2 > 4XZ) = P(Y > 4XZ) &= \int_0^1 P(Y > 4XZ \,|\, X = x) f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^1 P(Y > 4xZ \,|\, X = x)\,dx = \int_0^1 P(Y > 4xZ)\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty P(Y > 4xZ \,|\, Z = z) e^{-z}\,dz\,dx = \int_0^1 \int_0^\infty P(Y > 4xz) e^{-z}\,dz\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-4xz} e^{-z}\,dz\,dx = \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(4x+1)z}\,dz\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\log 5.
\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα της πρώτης γραμμής χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 5.3.2 του βιβλίου. Στην δεύτερη ισότητα της δεύτερης γραμμής χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία της X από τις Y, Z. Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθούμε αμέσως μετά, όταν δεσμεύουμε ως προς Z.

Ηθικό δίδαγμα: Όταν υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος που εξαρτάται από πολλές τυχαίες μεταβλητές (όπως ήταν το $\{Y > 4XZ\}$ πιο πάνω), δεσμεύουμε διαδοχικά ως προς τις εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές, με μιά σειρά που να μας βολεύει, ώσπου να φτάσουμε σε υπολογισμό πιθανότητας που να αφορά **μία** τυχαία μεταβλητή (ο υπολογισμός $P(Y > 4xz)$ πιό πάνω). Το ίδιο κάναμε στην άσκηση 23(α). Όμοια δουλεύουμε και για να αναγάγουμε τον υπολογισμό ενός πολλαπλού ολοκληρώματος στον διαδοχικό υπολογισμό μονοδιάστατων ολοκληρωμάτων (τεχνική που μαθαίνουμε στον Απειροστικό ΙΙΙ).

25. (α) Για $x \in \{0, 1, \cdots, a+b\}$, η κατανομή της $X_n \,|\, X_{n-1} = x$ είναι διακριτή που παίρνει την τιμή x με πιθανότητα $x/(a+b)$ και την τιμή $x+1$ με πιθανότητα $1 - x(a+b)^{-1}$. Άρα

$$m(x) := E(X_n \,|\, X_{n-1} = x) = x\frac{x}{a+b} + (x+1)\left(1 - \frac{x}{a+b}\right) = 1 + x\left(1 - \frac{1}{a+b}\right),$$

και

$$E(X_n \,|\, X_{n-1}) = m(X_{n-1}) = 1 + X_{n-1}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right).$$

(β) Έστω $a_n := E(X_n)$ και $c = 1 - (a+b)^{-1}$. Επειδή $E(X_n) = E(E(X_n \,|\, X_{n-1}))$, παίρνοντας μέση τιμή στην σχέση του προηγούμενου ερωτήματος βρίσκουμε

$$a_n = ca_{n-1} + 1 \text{ για } n \geq 1$$

ενώ $a_0 = a$. Διαιρώντας με c^n βρίσκουμε

$$\frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{a_{n-1}}{c^{n-1}}.$$

Άρα για $n \geq 1$

$$\frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{1}{c^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{c^1} + \frac{a_0}{c^0},$$

οπότε, επειδή $a_0 = a$,

$$a_n = 1 + c + \cdots + c^{n-1} + ac^n = \frac{c^n - 1}{c - 1} + ac^n = -(a+b)(c^n - 1) + ac^n = a + b - bc^n.$$

Προφανώς ο ίδιος τύπος ισχύει και για $n = 0$.

(γ) Έστω $A := \{$Η μπάλα που επιλέγουμε κατά το $n+1$ βήμα είναι άσπρη$\}$. Τότε

$$P(A) = E(\mathbf{1}_A) = E(E(\mathbf{1}_A \,|\, X_n)) = E(P(A \,|\, X_n)).$$

Ισχύει $P(A \,|\, X_n = x) = x/(a+b)$. Άρα $P(A \,|\, X_n) = X_n/(a+b)$, και

$$P(A) = E\left(\frac{X_n}{a+b}\right) = \frac{1}{a+b}E(X_n) = 1 - \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n.$$

26. (α) Έστω $A := \{$Η πρώτη ρίψη φέρνει Κ$\}$, και f_p η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής p (η οποία είναι η ομοιόμορφη στο $(0, 1)$). Τότε

$$P(A) = \int_0^1 P(A \,|\, p = x) f_p(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = 1/2.$$

(β) Έστω $B := \{$Και οι δύο ρίψεις φέρνουν Κ$\}$. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε

$$P(B) = \int_0^1 P(B \,|\, p = x) f_p(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3.$$

27. $c = \sqrt{15}/4\pi$, $\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X^2 = 16/15, \sigma_Y^2 = 4/15, \rho_{X,Y} = 1/4$.