Πιθανότητες II. Ασκήσεις 1

Διδιαστατες τυχαιες μεταβλητες
Μεση τιμη, περιθωριες, δεσμευμενες κατανομες

1. Εξάγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση έξι σφαιρίδια απο μία κάλπη που περιέχει 50 σφαιρίδια αριθμημένα $1, 2, \ldots, 50$. Έστω X η μικρότερη ένδειξη, και Y η μεγαλύτερη ένδειξη απο τις 6. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y).

2. Υπάρχει διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) της οποίας η συνάρτηση κατανομής ικανοποιεί $F(x, y) = 1 - e^{-xy}$ για κάθε $x, y \geq 0$;

3. Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Ποιά η τιμή της σταθεράς c;

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες της (X, Y).

(γ) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.

4. Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y < 1)$.

(β) Να υπολογιστούν οι $E(XY), E(Ye^X)$.

***5.** Έστω ότι επιλέγουμε ένα σημείο (X, Y) ομοιόμορφα στο $(0, 1) \times (0, 1)$ Ποιά η πιθανότητα ο εγγύτερος ακέραιος στον Y/X να είναι άρτιος; Δίνεται ότι η αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ έχει το εξής ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

6. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι όντως η f είναι συνάρτηση πυκνότητας.

(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X \mid Y}(\cdot \mid y), f_{Y \mid X}(\cdot \mid x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.

(γ) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $E(Y), E(X^2 \mid Y = y), E(e^Y \mid X = x)$ για $x, y \in (0, 1)$.

Απαντήσεις

1. Για $x, y \in \{1, 2, \cdots, 50\}$ με $y - x \geq 5$,

$$f(x,y) = \frac{6 \times 5 \times (y-x-1)_4}{(50)_6}$$

Διαφορετικά, $f(x,y) = 0$. Θεωρουμε ότι καταγράφουμε τα σφαιρίδια με την σειρά με την οποία εξάγονται, έχουμε δηλαδή διάταξη. Στον αριθμητή, το 6 είναι το πλήθος των επιλογών για την θέση στην οποία εμφανίζεται η ένδειξη y, το 5 είναι το πλήθος των επιλογών για την θέση στην οποία εμφανίζεται η ένδειξη x. Μένουν 4 θέσεις στις οποίες θα βάλουμε μια διάταξη 4 σφαριδίων με αριθμούς γνησίως ανάμεσα στα x, y.

2. 1ος τρόπος. Θα δείξουμε ότι αν για μια συνάρτηση κατανομής F υπάρχει η $h(x_0, y_0) := \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ σε ένα σημείο (x_0, y_0), τότε $h(x_0, y_0) \geq 0$. Ξέρουμε ότι για $\delta, \varepsilon > 0$ ισχύει

$$F(x_0+\delta, y_0+\varepsilon) - F(x_0+\delta, y_0) - F(x_0, y_0+\varepsilon) + F(x_0, y_0) = P(x_0 < X \leq x_0+\delta, y_0 < Y \leq y_0+\varepsilon) \geq 0.$$

Διαιρούμε με ε και παίρνουμε $\varepsilon \to 0$. Η πιό πάνω σχέση δίνει

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0+\delta, y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \geq 0.$$

Τώρα διαρούμε με δ και παίρνουμε $\delta \to 0$. Προκύπτει ότι $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \geq 0$.

Για την δοσμένη F, έχουμε $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = (1 - xy)e^{-xy}$, το οποίο δεν είναι πάντοτε μή αρνητικό.

2ος τρόπος. Για $x > 0$, στην $P(X \leq x, Y \leq y) = 1 - e^{-xy}$ παίρνουμε $y \to \infty$, και προκύπτει $P(X \leq x) = 1$, δηλαδή $F_X(x) = 1$ για κάθε $x > 0$. Επειδή η F_X είναι δεξιά συνεχής, έχουμε $F_X(0) = 1$. Όμως η $P(X \leq x, Y \leq y) = 1 - e^{-xy}$ για $x = 0$ και μετά για $y \to \infty$ δίνει $P(X \leq 0) = 0$, δηλαδή $F_X(0) = 0$. Άτοπο.

3. (α) $c = 2$.

(β) $f_X(x) = 3x^2 \mathbf{1}_{x \in [0,1]}$, $f_Y(x) = 2y \mathbf{1}_{y \in [0,1]}$.

(γ) Έστω

$$A := \{(x,y) \in [0,1]^2 : x < 1/3\},$$
$$B := \{(x,y) \in [0,1]^2 : y > 2x\}.$$

Τότε

$$P(X < 1/3) = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{1/3} 6x^2 y\,dxdy = (1/3)^3 = 1/27,$$

και

$$P(Y > 2X) = \iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{y/2} 6x^2 y\,dxdy = \int_0^1 \frac{y^4}{4}\,dy = 1/20.$$

Για τον προσδιορισμό των ορίων της ολοκλήρωσης, βοηθάει πολύ να κάνουμε σχήμα. Για την πρώτη πιθανότητα μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την περιθώρια της X, αλλά προτιμάμε την πιο πάνω γενική μέθοδο.

4. (α) Τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν τις $0 < x < y < 1, x + y < 1$ είναι ακριβώς αυτά στο εσωτερικό του τριγώνου T με κορυφές τα σημεία $(0,0), (1/2, 1/2), (0,1)$. Ολοκληρώνουμε στο T πρώτα σε οριζόντιες γραμμές, δηλαδή ως προς x.

$$P(X+Y<1) = \iint_T f(x,y)dxdy = \int_0^{1/2}\int_0^y 8xy\,dxdy + \int_{1/2}^1\int_0^{1-y} 8xy\,dxdy$$
$$= 4\int_0^{1/2} y^3 dy + 4\int_{1/2}^1 y(1-y)^2 dy = ... = 1/6.$$

(β) Με χρήση γνωστής πρότασης (Πρόταση 2.3.1, σελ. 66 στο βιβλίο του κ. Κούτρα) παίρνουμε

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^y 8x^2y^2\,dxdy = \frac{8}{3}\int_0^1 y^5\,dy = \frac{4}{9}.$$

Όμοια

$$E(Ye^X) = \iint_{\mathbb{R}^2} ye^x f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^y ye^x 8xy\,dxdy$$
$$= ... = 8\int_0^1 y^2(ye^y - e^y + 1)\,dy = ... = \frac{200}{3} - 24e.$$

Ολοκληρώνουμε κατα παράγοντες αρκετές φορές.

5. Ένα σχήμα βοηθάει. Το σύνολο των (x,y) στο $(0,1)\times(0,1)$ για τα οποία ο ακέραιος που είναι εγγύτερα στο πηλίκο y/x είναι ένας από τους 0, 2, 4,... είναι ένωση ξένων μεταξύ τους τριγώνων. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $(5-\pi)/4$.

6. (β) Υπολογίζουμε πρώτα τις πυκνότητες των X, Y. Βρίσκουμε

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x),$$
$$f_Y(y) = -\log y\,\mathbf{1}_{(0,1)}(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ έχουν νόημα ακριβώς για $x, y \in (0,1)$ και ισούνται με

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = -\frac{1}{x\log y}\mathbf{1}_{(y,1)}(x),$$
$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = \frac{1}{x}\,\mathbf{1}_{(0,x)}(y).$$

Παρατηρούμε ότι η $Y\,|\,X = x$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,x)$.

(γ) Υπολογίζουμε

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = -\int_0^1 y \log y\,dy = \ldots = \frac{1}{4}$$

$$E(X^2 \,|\, Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,dx = -\int_y^1 x^2 \frac{1}{x \log y}\,dx = -\frac{1}{2\log y}(1 - y^2),$$

$$E(e^Y \,|\, X = x) = \int_{\mathbb{R}} e^y f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)\,dy = \int_0^x e^y \frac{1}{x}\,dy = \frac{e^x - 1}{x}.$$