B

Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 5 Νοεμβρίου 2011

1. (25 Βαθμοί) Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} -xy & \text{αν } (x,y) \in (-1,0)\times(0,1)\cup(1,2)\times(-1,0), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X+Y<0)$.

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(XY)$.

(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

2. (30 Βαθμοί) Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που καθεμία ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$.

(α) Ποιά είναι η από κοινού πυκνότητα του ζεύγους $(U,V) := (X/Y, Y)$;

(β) Ποιά είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X/Y;

3. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\ge 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, που καθεμία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(-1,1)$. Και έστω N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις $\{X_i : i \ge 1\}$ και η οποία ακολουθεί την μετατοπισμένη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0,1)$. Δηλαδή

$$P(N=x) = \begin{cases} (1-p)^x p & \text{για } x \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτουμε $S_0 = 0$ και $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_{X_1}(t) := E(e^{tX_1})$ της X_1 για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής S_N.

4. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε για κάθε $n \ge 1$ η X_n να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο n, δηλαδή με πυκνότητα $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}\mathbf{1}_{x>0}$. Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

5. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με καθεμία να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Για κάθε $n \ge 1$ θετικό ακέραιο, θέτουμε $W_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ και $Z_n := nW_n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(Z_n)_{n\ge 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή Z με κατανομή την εκθετική με παράμετρο 1.

Υπόδειξη: Με βάση τον ορισμό, αρκεί να δείξουμε ότι $F_{Z_n}(t) := P(Z_n \le t) \to F_Z(t)$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

1. Ίδια με ομάδα Α.

2. Ίδια με ομάδα Α.

3. Παρόμοια με ομάδα Α.

4. Ίδια με ομάδα Α.

5. Για $t \leq 0$ έχουμε $F_{Z_n}(t) = 0 = F_Z(t)$, ενώ για $t > 0$ και $n > t$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(t) &= 1 - P(Z_n > t) = 1 - P\left(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > \frac{t}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > \frac{t}{n}, X_2 > \frac{t}{n}, \ldots, X_n > \frac{t}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > \frac{t}{n}\right) \cdots P\left(X_n > \frac{t}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Η προτελευταία ισότητα έπεται από την ανεξαρτησία των $X_1, \ldots, X_n$, ενώ η τελευταία ισχύει γιατί $0 < t/n < 1$ και όλες οι $X_1, \ldots, X_n$ ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. Άρα $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 1 - e^{-t} = F_Z(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.