Πιθανότητες ΙΙ

Τελική Εξέταση, 27 Ιουνίου 2011

1. (2 Βαθμοί) Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2} & \text{αν } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι η f είναι πράγματι πυκνότητα.

(β) Για ποιά $y \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δεσμευμένη πυκνότητα $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$; Για ένα τέτοιο σταθερό y, να υπολογιστεί η δεσμευμένη πυκνότητα $x \mapsto f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)$.

(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(\log X \,|\, Y = y)$ για $y \in (0,1)$.

2. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}, (Y_i)_{i\geq 1}$ δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών στον ίδιο χώρο πιθανότητας ώστε οι $\{X_i : i \geq 1\}$ να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και με τις $\{Y_i : i \geq 1\}$, και

$$E(X_i) = -1, E(X_i^2) = 2, E(Y_i) = 1, E(Y_i^2) = 3 \text{ για κάθε } i \geq 1,$$
$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = a \text{ για κάθε } i, j \geq 1 \text{ με } i \neq j,$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά.

(α) (3 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) = 5n + n(n-1)a.$$

(β) (0.5 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι $a \geq 0$.

3. (2 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, που καθεμία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Έστω και N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις $\{X_i : i \geq 1\}$ και η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 3. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(X_1 X_2 \cdots X_N X_{N+1})$.

4. (3 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $E(X_1) = 3$, $E(X_1^2) = 10$. Για κάθε n θετικό ακέραιο θέτουμε $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

(α) $\lim_{n\to\infty} P(S_n < 3.5n)$,

(β) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 4n)$,

(γ) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 3n)$.

5. (1.5 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $X_1 \sim N(-3, 10)$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\lim_{n\to\infty}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = -\infty$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

1. (α) Έχουμε $f \geq 0$ και

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^y \frac{2x}{y^2}\,dxdy = \int_0^1 \frac{y^2}{y^2}dy = 1.$$

Άρα η f είναι όντως πυκνότητα.

(β) Η δεσμευμένη πυκνότητα $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$ ορίζεται ακριβώς για τα $y \in \mathbb{R}$ για τα οποία $f_Y(y) > 0$. Και επειδή

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{αν } y \in \mathbb{R} \setminus (0,1), \\ \int_0^y \frac{2x}{y^2}\,dx = 1 & \text{αν } y \in (0,1), \end{cases}$$

τα ζητούμενα y είναι τα σημεία του συνόλου $(0,1)$. Για ένα τέτοιο y έχουμε

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{y^2}\mathbf{1}_{(0,y)}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2} & \text{αν } x \in (0,y), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0,y). \end{cases}$$

(γ)

$$E(\log X\,|\,Y=y) = \int_{\mathbb{R}} \log x\, f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,dx = \frac{1}{y^2}\int_0^y 2x\log x\,dx = \cdots = \log y - \frac{1}{2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

2. (α) Από τον τύπο για την διασπορά αθροίσματος, έχουμε

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_iY_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_iY_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{Cov}(X_iY_i, X_jY_j). \tag{1}$$

Τώρα για $i \in \{1,2,\dots,n\}$,

$$V(X_iY_i) = E(X_i^2Y_i^2) - (E(X_iY_i))^2 = E(X_i^2)E(Y_i^2) - (E(X_i)E(Y_i))^2 = 2\times 3 - 1 = 5,$$

ενώ για $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ με $i \neq j$ έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X_iY_i, X_jY_j) &= E(X_iY_iX_jY_j) - E(X_iY_i)E(X_jY_j) \\ &= E(X_i)E(X_j)E(Y_iY_j) - E(X_i)E(Y_i)E(X_j)E(Y_j) \\ &= E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j) = \operatorname{Cov}(Y_i,Y_j) = a. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $\{X_i : i \geq 1\}$ από τις $\{Y_i, i \geq 1\}$ και την ανεξαρτησία των $\{X_i : i \geq 1\}$ μεταξύ τους. Το δεύτερο άθροισμα στην (;;) έχει $\binom{n}{2}$ όρους, καθένας ίσος με a, οπότε

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_iY_i\right) = 5n + 2\frac{n(n-1)}{2}a = 5n + n(n-1)a.$$

(β) Από το (α), για κάθε n θετικό ακέραιο έχουμε

$$5n + n(n-1)\,a \geq 0.$$

Αν $a < 0$, τότε για μεγάλο n η τελευταία ποσότητα θα ήταν αρνητική. Άτοπο.

3. Δεσμεύουμε ως προς την τυχαία μεταβλητή N (όπως κάνουμε και με το άθροισμα τυχαίου πλήθους τυχαίων μεταβλητών)

$$E(X_1X_2\cdots X_{N+1}) = E(E(X_1X_2\cdots X_{N+1}|N)) = E(m(N)),$$

όπου η συνάρτηση m ορίζεται για n μη αρνητικό ακέραιο ως

$$m(n) = E(X_1 X_2 \cdots X_{N+1} | N = n) = E(X_1 X_2 \cdots X_{n+1} | N = n) = E(X_1 X_2 \cdots X_{n+1})$$
$$= E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_{n+1}) = (1/2)^{n+1}.$$

Στην τελευταία ισότητα της πρώτης γραμμής χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία της N από τις $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Άρα η αρχική μέση τιμή ισούται με

$$E((1/2)^{N+1}) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{-3} \frac{3^n}{n!} = \frac{e^{-3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{e^{-3}}{2} e^{3/2} = \frac{e^{-3/2}}{2}.$$

4. Επειδή $E(X_1) = 3$ και $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 1$, έχουμε από τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών και το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι

$$\frac{S_n}{n} \to 3 \text{ κατά πιθανότητα} \tag{2}$$
$$\frac{S_n - 3n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0,1) \tag{3}$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα αμέσως βλέπουμε ότι το όριο στο (α) είναι 1 ενώ στο (β) είναι 0. Το (γ) θέλει λίγο παραπάνω σκέψη.

(α)

$$P(S_n \geq 3.5n) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq 3.5\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 3\right| \geq \frac{1}{2}\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 3\right| > \frac{1}{4}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω της (;;) και του ορισμού της σύγκλισης κατά πιθανότητα. Άρα το ζητούμενο όριο είναι 1.

(β)

$$P(S_n > 4n) = P\left(\frac{S_n}{n} > 4\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 3\right| > 1\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω της (;;).

(γ)

$$P(S_n > 3n) = P\left(\frac{S_n - 3n}{\sqrt{n}} > 0\right) \to P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω της (;;).

5. Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = -3.$$

Άρα με πιθανότητα 1

$$X_1 + \cdots + X_n = n \, \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \infty \times (-3) = -\infty$$

καθώς $n \to \infty$.