1. σ-Αλγεβρες

Έστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο. Ονομάζουμε **σ-άλγεβρα** στο X οποιοδήποτε σύνολο $\mathcal{A}$ έχει τις εξής ιδιότητες.

(i) Τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ είναι υποσύνολα του X. Δηλαδή $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.
(ii) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
(iii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(iv) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \geq 1$ τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Επειδή τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ είναι σύνολα, αντί σύνολο συνηθίζουμε να λέμε το $\mathcal{A}$ και **οικογένεια**. Όμως αυτός ο όρος δεν σημαίνει τίποτα παραπάνω από τον όρο σύνολο.
Ο πιο πάνω ορισμός λέει λοιπόν ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις (ιδιότητες (iii), (iv)).

Παραδείγματα

1) Άν έχουμε ένα σύνολο X, τότε οι οικογένειες

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X),$$

είναι σ-άλγεβρες. Η πρώτη είναι η ελάχιστη δυνατή και η δεύτερη είναι η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα στο X.

2) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Θέτουμε $B_1 := \{1, 2, 3\}, B_2 := \{4, 5, 6\}, B_3 := \{7, 8, 9, 10\}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_2 \cup B_3\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X. Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του B_2 είναι το $B_1 \cup B_3$ το οποίο βρίσκεται και αυτό στην $\mathcal{A}$. Αντίθετα η

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_1 \cup B_2\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί ενώ είναι κλειστή σε ενώσεις δεν είναι κλειστή σε συμπληρώματα. Τα συμπληρώματα των $B_1, B_2, B_1 \cup B_2$ δεν περιέχονται στην $\mathcal{A}_1$

3) $X = \mathbb{R}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα (εύκολη άσκηση). Το κενό είναι αριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (το κενό), άρα ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

Πρόταση 1. *Αν $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ είναι ένα σύνολο απο σ-άλγεβρες στο X, τότε και η τομή τους*

$$\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{A}_i \text{ για κάθε } i \in I\}$$

είναι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη. Προφανώς τα $\emptyset, X$ ανήκουν στην τομή γιατί και τα δύο είναι στοιχεία κάθε σ-άλγεβρας στο X. Αν $A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$, τότε επειδή κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι

$$X \setminus A \in \mathcal{A}_i \text{ για κάθε } i \in I,$$

δηλαδή $X \setminus A \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έπεται λοιπόν ότι είναι σ-άλγεβρα. ■

2. Παραγομενη σ-αλγεβρα

Αν $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, δηλαδή είναι ένα σύνολο που έχει ως στοιχεία κάποια υποσύνολα του X, τότε ορίζουμε

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \text{ και η } \mathcal{A} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\}$$

το σύνολο των σ-αλγεβρών στο X που καθεμία τους περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$.

Ορισμός: σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{C}$ λέμε την τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{C}$. Την συμβολίζουμε με $\sigma(\mathcal{C})$. Με σύμβολα,

$$\sigma(\mathcal{C}) := \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{H}}\mathcal{A}.$$

Δηλαδή η $\sigma(\mathcal{C})$ περιέχει ακριβώς όλα τα σύνολα $B \subset X$ με την ιδιότητα

$$B \in \mathcal{A} \text{ για κάθε σ-άλγεβρα } \mathcal{A} \text{ στο } X \text{ με } \mathcal{A} \supset \mathcal{C}$$

Η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα όπως έπεται από την Πρόταση 1, και περιέχει τα στοιχεία της $\mathcal{C}$. Μάλιστα είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$, γιατί οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{C}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}$, οπότε $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Προφανώς, αν η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

3. Τα συνολα Borel

Έστω X μετρικός χώρος[1], και $\mathcal{O}$ το σύνολο των ανοιχτών (open) συνόλων του X. Σύνολα Borel στον X ονομάζουμε τα στοιχεία της σ-άλγεβρας

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}).$$

Η $\mathcal{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Γενικά η οικογένεια $\mathcal{O}$ των ανοικτών συνόλων δεν είναι σ-άλγεβρα. Γιαυτό την μεγαλώνουμε όσο πιο λίγο γίνεται ώσπου να πάρουμε μια σ-άλγεβρα.

Πρόταση 2. *Κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Απο τον ορισμό των συνόλων Borel έχουμε $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{O}) =: \mathcal{B}(X)$. Αν F είναι κλειστό, τότε $X \setminus F \in \mathcal{B}(X)$ ώς ανοιχτό. Αλλά η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε πρέπει και το συμπλήρωμα του $X \setminus F$ να περιέχεται στην $\mathcal{B}(X)$. Άρα $F \in \mathcal{B}(X)$. ■

Πρόταση 3. *Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Τα διάφορα σενάρια για ένα υποδιάστημα είναι

$$(-\infty, a], [a, \infty), (-\infty, a), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$$

Τα πρώτα δύο είναι κλειστά σύνολα, τα επόμενα τρία είναι ανοιχτά, το $[a, b]$ είναι κλειστό. Για το $(a, b]$ γράφουμε

$$(a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, \infty)).$$

[1]Στο μάθημα θα έχουμε το X να είναι κάποιος χώρος $\mathbb{R}^n$.

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έπεται ότι $(-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Όμοια δείχνουμε ότι $[a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα διαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνουμε ξεκινώντας απο διαστήματα και εφαρμόζοντας αριθμήσιμο πλήθος φορών τις πράξεις της ένωσης, τομής, συμπληρώματος θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Όμοια, στα $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, όλα τα συνηθισμένα σχήματα (κύκλοι, ομαλές καμπύλες, ορθογώνια, ημίχωροι) είναι Borel ως κλειστά ή ανοιχτά σύνολα ή επειδή προκύπτουν απο κλειστά ή ανοιχτά με εφαρμογή των πράξεων της ένωσης, τομής, συμπληρώματος αριθμήσιμο πλήθος φορές.

4. Τυχαιες μεταβλητες

Α) Έχουμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Τυχαία μεταβλητή σε αυτό τον χώρο λέμε κάθε συνάρτηση

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{1}$$

Γιατί απαιτούμε από την X να έχει την ιδιότητα (1);

Δύο λόγοι

1) Θέλουμε να μπορούμε να μιλάμε για πιθανότητες της μορφής

$$P(X \in [a, b]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b]\}), \tag{2}$$

δηλαδή $P(X^{-1}([a, b]))$. Πρέπει επομένως το $X^{-1}([a, b])$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της P, το οποίο είναι το $\mathcal{A}$. Αρα χρειαζόμαστε την $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ σίγουρα για A υποδιάστημα του $\mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το να το ζητήσουμε για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (άσκηση).

2) Θέλουμε να μπορούμε να ορίσουμε την μέση της τιμή $E(X)$. Και για αυτό χρειαζόμαστε να έχουν νόημα οι πιθανότητες όπως στην (2).

Β) Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για τον ορισμό n-διάστατης τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Εκεί ζητάμε

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ την λέμε Borel μετρήσιμη αν

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

Γ) Δύο ακόμα απαιτήσεις μετρησιμότητας.

1) Πυκνότητα στο $\mathbb{R}^n$ λέμε κάθε $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ με τις ιδιότητες

(i) η f είναι Borel μετρήσιμη,

(ii) $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = 1$.

Την πρώτη ιδιότητα την απαιτούμε ώστε να ορίζονται[2] όλα τα ολοκληρώματα

$$\int_A \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα καλό σύνολο (ανοιχτό, κλειστό κ.λπ.). Από μια πυκνότητα δεν ζητάμε να είναι συνεχής συνάρτηση. Ισχύει βέβαια ότι καθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

2) Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι n-διάστατη τυχαία μεταβλητή, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, και θέλουμε να θεωρήσουμε την $h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$. Απαιτούμε η h να είναι Borel μετρήσιμη (ορισμός πιο πάνω). Αυτό το ζητάμε ώστε η $h(X)$ να είναι τυχαία μεταβλητή. Γιατί τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$(h(X))^{-1}(A) = X^{-1}(h^{-1}(A)),$$

και αναρωτιόμαστε αν το τελευταίο σύνολο ανήκει στην $\mathcal{A}$. Λόγω της (4) έχουμε $B := h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, και επειδή η X είναι τυχαία μεταβλητή, έπεται από την (3) ότι

$$X^{-1}(h^{-1}(A)) = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

[2]Αυτό δεν είναι της στιγμής να το εξηγήσουμε.