

ΒΑΣΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Για $n \geq 1$ θετικό ακέραιο ισχύει

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Το πρώτο άθροισμα μας βοηθάει να βρούμε το άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου. Δηλαδή

$$a_1 + (a_1 + \omega) + (a_1 + \omega) + \dots + (a_1 + (n-1)\omega) = n \frac{(2a_1 + (n-1)\omega)}{2}.$$

Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου

$$\sum_{i=0}^n r^i = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad \text{για } r \neq 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1 - r} \quad \text{για } |r| < 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i r^{i-1} = 1 + 2r + 3r^2 + \dots = \frac{1}{(1 - r)^2} \quad \text{για } |r| < 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = 2 + 6r + 12r^2 + \dots = \frac{2}{(1 - r)^3} \quad \text{για } |r| < 1 \quad (4)$$

Στην (1), αθροίζουμε τους πρώτους $n + 1$ όρους μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο r . Αυτό συνεπάγεται ότι αν έχουμε n διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου $a_1, ra_1, \dots, r^{n-1}a_1$ το άθροισμα τους είναι

$$a_1 + a_1 r + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Η (2) προκύπτει από την (1) παίρνοντας $n \rightarrow \infty$.

Οι (3), (4) προκύπτουν από την (2) με παραγωγή. Προφανώς έχουν και εκδόσεις αν η άθροιση σταματάει σε κάποιο πεπερασμένο n . Δηλαδή $\sum_{i=1}^n$. Όμοια και αυτές προκύπτουν από την (1) με παραγωγή.

Διώνυμο Νεύτωνα

Για $a, b \in \mathbb{C}, n \geq 1$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Δυναμοσειρά της εκθετικής

Για $x \in \mathbb{C}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Δυναμοσειρά του λογαρίθμου

Για $x \in (-1, 1]$

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

\log είναι ο λογάριθμος με βάση το e .

Παρατήρηση: Διάφορα αθροίσματα υπολογίζονται με χρήση των πιο πάνω. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
 e^{x^2/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2^k} x^{2k}, & q^k + q^{k+1} + \dots + q^n &= q^k \frac{q^{n-k+1} - 1}{q - 1}, & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} &= 2, \\
 \log 2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, & 2^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, & 3^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \\
 \sum_{k=1}^n \sin(kx) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) = \dots = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left((n + \frac{1}{2})x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & & \text{για } x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.
 \end{aligned}$$

Το τελευταίο παράδειγμα δεν μας χρειάζεται στο μάθημα, δίνεται απλώς για να φανεί η χρησιμότητα των βασικών αθροισμάτων πιο πάνω.