Θέμα 5: Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

α): $X \in L^3 \Rightarrow X \in L^2$

β): $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{L^p} f(X)$ για f συνεχή.

γ): Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ παράγονται και απο τα αριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

δ): Σύνολα θετικού μέτρου Lebesgue είναι οπωσδήποτε υπεραριθμήσιμα.

ε): Κάθε απλή τυχαία μεταβλητή είναι μετρήσιμη.

ζ): Είναι αδύνατον $X^+ = X^-$ με πιθανότητα 1.

η): θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης $\Rightarrow$ θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης.

θ): Μία σφιχτή ακολουθία τ.μ. έχει υπακολουθία που συγκλίνει κατά κατανομή.

ι): Το στήριγμα μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής είναι αριθμήσιμο σύνολο.

κ): Υπάρχουν αριθμήσιμα σύνολα που δεν είναι στήριγμα κάποιας τυχαίας μεταβλητής.

λ): Σύγκλιση κατά κατανομή $\Rightarrow$ σύγκλιση ροπών οποιασδήποτε τάξης.

μ): Μία ακολουθία τ.μ. που συγκλίνει πλήρως, συγκλίνει και κατά πιθανότητα.

ν): Η ακολουθία $n^{-1}N(0,1)$ συγκλίνει ασθενώς.

ξ): Η ακολουθία των εκφυλισμένων τ.μ. $(-1)^n$ είναι σφιχτή.

ο): Αν (A_n) φθίνουσα ακολουθία μετρησίμων συνόλων, τότε $\limsup A_n = \liminf A_n$.

$\Omega = [0,1]$ $P = \lambda \leftarrow$ Lebesgue

$X(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $f(x) = x^2$

$X \in L^1$, $f(X) \notin L^1$

$|f_n(x)| \le M$ $\forall n, \forall x \in X$

(ι) $X = q_n$ με πιθ. $\frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$, $\mathbb{Q} = \{q_n : n \geq 1\}$

$\operatorname{supp} P^X = \mathbb{R} \setminus \bigcup \{V : P^X(V) = 0, V$ ανοιχτό$\} = \mathbb{R}$

(λ) $X_n \Rightarrow X \overset{?}{\longrightarrow} E(X_n^k) \to E(X^k)$

όχι

πόρισμα 141, 18

$X_n \to X$ $\forall \varepsilon > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$

$X_n \sim N(0,1)$

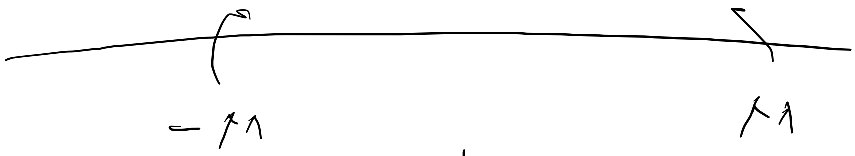
$\frac{X_n}{n} \Rightarrow 0$ $\varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = E(e^{it\frac{X_n}{n}}) = e^{-\frac{t^2}{2n^2}} \to 1$

$= \varphi_Y(t)$

$Y \equiv 0$

(3) $X_n = (-1)^n$

$$\lim_{M \to \infty} \sup_{n \geq 1} P(|X_n| > M) = 0$$

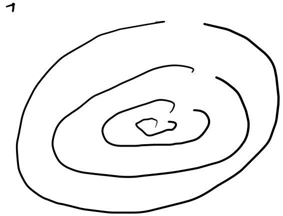


$1 - \varepsilon$

(0)

$$\liminf_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\limsup_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$$



15.6 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ της X_1 να είναι διαφορίσιμη στο 0 και $\phi'(0) = ia$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{S_n}{n} \to a$$

κατά πιθανότητα για $n \to \infty$.

Λύση

Για $t \neq 0$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = E\left(e^{it\frac{S_n}{n}}\right) = E\left(e^{i\frac{t}{n}X_1}\right)^n$$

$$= \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{c_n(t)}{n}\right)^n \to e^{iat} = \varphi_Y(t)$$

e^{ita}

$$c_n(t) = n\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - 1\right) = \frac{\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{\frac{t}{n}}\, t \to iat$$

με $Y \equiv a$.

Άρα $\frac{S_n}{n} \Rightarrow Y \equiv a \implies \frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} a$

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες έχουμε ότι για κάθε $x \geq 10$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n/n^2 \geq 1$.

Λύση

$A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq n^2\}$, $n \geq 1$. Ανεξάρτητα

$$P(A_n) = P(X_1 \geq n^2) \geq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, Άρα (2° λήμμα Borel-Cantelli)

$$P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$$

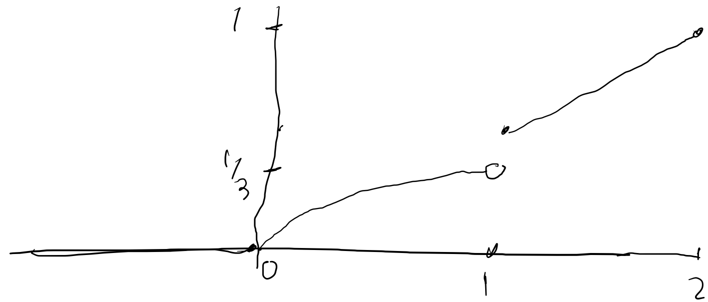
$\omega \in \limsup A_n \Rightarrow X_n(\omega) \geq n^2$ για άπειρα n

2. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{x} & \text{αν } x \in [0,1), \\ \frac{1}{2}x & \text{αν } x \in (1,2). \end{cases}$$

(α) Να προσδιοριστούν οι τιμές $F(-1), F(1), F(3)$.

(β) Να προσδιοριστούν οι πιθανότητες $\mathbf{P}(X < 1), \mathbf{P}(X = 1), \mathbf{P}(0.25 < X < 1.5)$.



(α)

$F(-1) = 0$

$F(1) = F(1+)$

$= \frac{1}{2}$

$F(2-) = 1 \Rightarrow F(2) = 1 \overset{F \leq 1}{\Rightarrow} F(3) = 1$

(β) $P(X < 1) = F(1-) = \frac{1}{3}$

$\quad \| $

$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \leq 1 - \frac{1}{n}\}\right)$

$P(X = 1) = F(1) - F(1-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(0.25 < X < 1.5) = F(1.5-) - F(0.25)$

$= F(1.5) - F(0.25) =$

6. (20 Βαθμοί) Χαρακτηρίστε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος.

(α) Αν $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n| = 0$, τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$ (σύγκλιση κατά πιθανότητα).

(β) Αν $\mathbf{E}X = \infty$, τότε $\mathbf{P}(X = \infty) > 0$.

(γ) Αν $\mathbf{E}X = \infty$ τότε $\mathbf{E}(X^-) < \infty$.

(δ) Αν $\phi_X(t) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

(ε) Αν $M_X(t) = M_Y(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

Για τις σωστές δώστε επιχείρημα, για τις λάθος δώστε αντιπαράδειγμα.

Λύση

(α) Σ $P(|X_n| > \varepsilon) \leq \dfrac{E|X_n|}{\varepsilon}$

(β) $X \sim$ Cauchy

$E|X| = \infty$ $\quad P(X \in \mathbb{R}) = 1$

(γ) $EX = \underbrace{EX^+}_{=\infty} - \underbrace{EX^-}_{<\infty}$

(δ) $Y \equiv 0$ $\quad \varphi_Y(t) = E(e^{it\cdot 0}) = 1$

$P(X \in A) = P(Y \in A) \quad \forall A \in \mathbb{R}$

$A = \{0\}$

$P(X = 0) = \underbrace{1}_{=1}$

(ε) λάθος

$f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ $\qquad \dfrac{1}{\pi(1+(x-2)^2)} = f_Y(x)$

$M_X(t) = \begin{cases} \infty & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$

5. (15 Βαθμοί) (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson(λ), όπου $\lambda \in (0, \infty)$ δεδομένη σταθερά. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε η $X + Y$ να έχει την κατανομή Poisson(1). Τι κατανομή ακολουθεί καθεμία από τις X, Y;

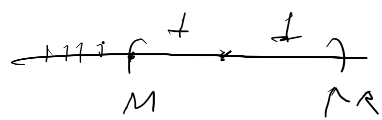
(α) $$E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

(β) $$\varphi_{X+Y}(t) = e^{e^{it}-1}$$

$$\varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = (\varphi_X(t))^2 \overset{*}{\Longrightarrow} \varphi_X(t) = e^{\frac{1}{2}(e^{it}-1)}$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Poisson}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\varphi_X(t) = \pm e^{\frac{1}{2}(e^{it}-1)}$$



+

$\varphi_X(M) = 0$

−

10.14 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(X = x)\,\mathbf{P}(Y = x).$$

Στο άθροισμα στο δεξί μέλος, το πλήθος των μη μηδενικών όρων είναι αριθμήσιμο.

Λύση

$$P(X=Y) = E\left(1_{X-Y=0}\right) =$$

$$= \int 1_{x-y=0}\, dP^{(X,Y)}(x,y) = \int \underbrace{\int 1_{x-y=0}\, dP^{Y}(y)}\, dP^{X}(x)$$

$$= \int P(Y=x)\, dP^{X}(x)$$

$[S = \{x \in \mathbb{R} : P(Y=x) > 0\}$ αριθμήσιμο$]$

$$= \int \sum_{s \in S} P(Y=s)\, 1_{s=x}\, dP^{X}(x)$$

$$= \sum_{s \in S} P(Y=s) \int 1_{x=s}\, dP^{X}(x)$$

$$= \sum_{s \in S} \underbrace{P(Y=s)}\, P(X=s) = \sum_{s \in \mathbb{R}}$$

5.22 (Λήμμα Scheffe) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n : X \to [0,\infty)$ και $\int f_n\,d\mu < \infty$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού και $\int f\,d\mu < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,d\mu = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Λύση

"$\Rightarrow$": $\left|\int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu\right| \leq \int |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$

"$\Leftarrow$": $|f - f_n| = (f - f_n)^+ + (f - f_n)^-$

$= 2(f - f_n)^+ - (f - f_n)$ (*)

(*) $x = x^+ - x^- \Rightarrow x^- = x^+ - x$

$(f - f_n)^+ \longrightarrow 0$ σ.β.

$0 \leq (f - f_n)^+ \leq f$

$\overset{\text{Θ.Κ.Σ}}{\Longrightarrow} \int (f - f_n)^+\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow E|f - f_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

12.11 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Να δειχθεί ότι $S_n/n \to \mathbf{E}(X_1)$ στον $\mathcal{L}^1$.
[Υπόδειξη: Λήμμα Scheffe.]

Λύση

Ας υποθ. ότι X_i παίρναν τιμές στο $[0,\infty]$

Τότε $\frac{S_n}{n} \to \mu = EX_1$ σ.β. ΙΝΜΑ

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$E\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Λήμμα Scheffe $\Rightarrow$ $\frac{S_n}{n} \to \mu$ στον L^1

Γενική περίπτωση:

Ορίζουμε $\Sigma_n = X_1^+ + \dots + X_n^+$

$T_n = X_1^- + \dots + X_n^-$

... $\frac{\Sigma_n}{n} \to EX_1^+$ στον L^1

$\frac{T_n}{n} \to EX_1^-$ ''

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\Sigma_n}{n} - \frac{T_n}{n} \to EX_1^+ - EX_1^- = \mu$$

στον L^1

$f(t)=\log E(e^{tX})$ κυρτή. Δύο τρόποι

- Hölder
- $f'(t) = \dfrac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})} \Rightarrow f''(t) = \dots$

Ο δεύτερος λειτουργεί στο εσωτερικό του $D=\{t\in\mathbb{R} : E(e^{tX})<\infty\}$.
Έπειτα θέλει κάποια επιχειρήματα για να πάμε στο $\mathbb{R}$.