Θέμα 1: Έστω $X = \{1,2,3,4\}$ και $\mathcal{A}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει το $\emptyset$, το X και όλα τα δισύνολα του X.

α): Να εξεταστεί αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, σ-άλγεβρα, κλάση Dynkin, λ-κλάση.

β): Στις περιπτώσεις που η $\mathcal{A}$ έχει τη δομή που περιγράφεται στο (α), να βρεθεί γεννήτορας $\mathcal{C}$ με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό στοιχείων.

γ): Στις περιπτώσεις που η $\mathcal{A}$ δεν έχει τη δομή που περιγράφεται στο (α), να βρεθεί η οικογένεια $\mathcal{B}$ που παράγεται απο αυτήν μέσω της αντίστοιχης δομής (η ελάχιστη δυνατή που περιέχει την $\mathcal{A}$).

Λύση

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

(α) Δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί π.χ.
$\{1\} = \{1,2\} \cap \{1,3\} \notin \mathcal{A}$

Είναι κλάση Dynkin

Αν $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{A} \overset{?}{\Longrightarrow} B \setminus A \in \mathcal{A}$

(β) $\mathcal{C} : \delta(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$

$$\mathcal{C} = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$$

(γ) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X)$

γιατί $\{1\} = \{1,2\} \cap \{1,3\} \in \sigma(\mathcal{A})$

όμοια $\{2\}, \{3\}, \{4\} \in \sigma(\mathcal{A})$ . . .

14. Η $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι τυχαία μεταβλητή αν $\forall b \in \mathbb{R}$:

○ $\{X \leq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{X \geq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{-b \leq X \leq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{X^3 \leq b\} \in \mathcal{A}$

$A \subset \mathbb{R}$ όχι Borel

Το τρίτο είναι λάθος. Παίρνουμε $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X = f$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

$$f^{-1}([-b, b]) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν } b \geq 1 \\ \emptyset & \text{αν } b < 1 \end{cases}$$

$\{-b \leq f \leq b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Η f ικανοποιεί το τρίτο αλλά δεν είναι μετρήσιμη.

6. Σε μία άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος, ποιά απο τα παρακάτω ενδεχόμενα έχουν πιθανότητα 0;

○ μόνο Γ ○ τελικά Γ ○ πεπερασμένα Κ ○ άπειρα Κ

$U \sim U(0,1)$

$1 - U \stackrel{d}{=} U$

$A_n = \{ \Gamma$ της ρίψης $n, n+1, \ldots \}$

$P(A_n) = 0$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$

11. Αν $P(|X_n - X| > 1/n) < 1/n^2$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ τότε

○ $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ○ $X_n \xrightarrow{p} X$ ○ $X_n \xrightarrow{L^1} X$ ○ $X_n \xrightarrow{c} X$

$A_n = \{ |X - X_n| > \frac{1}{n} \}$

$\sum P(A_n) < \infty, \quad P(\underbrace{\limsup A_n}_{B}) = 0$

$\omega \in \Omega \setminus B \Rightarrow \exists\, n_0(\omega):$

$n > n_0(\omega) \Rightarrow |X(\omega) - X_n(\omega)| \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

Αν είχαμε

$P(|X - X_n| > \frac{1}{n}) < \frac{1}{\log n} \quad \forall n > 2$

$\forall \varepsilon > 0$. για $n > \frac{1}{\varepsilon}$ έχουμε

$P(|X - X_n| > \varepsilon) \leq P(|X - X_n| > \frac{1}{n}) < \frac{1}{\log n} \to 0$

Άρα $X_n \xrightarrow{P} X$ (κατά πιθανότητα δηλαδή)

4. (15 Βαθμοί) Να υπολογιστούν τα όρια των εξής ποσοτήτων όταν ο φυσικός $n \to \infty$:

$$(\alpha)\ \int_0^1 x^n \sin(nx^2)\,dx \qquad (\beta)\ \mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X|>n}) \qquad (\gamma)\ \mathbf{E}(Y^2 \mathbf{1}_{|Y|\leqslant n})$$

X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathbf{E}(X^2) = 1, \mathbf{E}(Y^2) = \infty$.

$E(X^2) = 1$

$E(\overbrace{X^2 1_{|X| > n}}^{X_n})$

$\lim_{n\to\infty} X^2(\omega) 1_{|X(\omega)| > n} = 0$

$|X_n| \leq X^2, \quad E(X^2) < \infty$

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Το όριο ισούται με $E(0) = 0$

$$E\big(\underbrace{Y^2 \, 1_{|Y| \le n}}_{X_n}\big)$$

$$0 \le X_n \uparrow \qquad \lim_{n\to\infty} E(X_n) = E\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right)$$

$$= E(Y^2) < \infty$$

$$1_{|Y(\omega)| \le n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad Y(\omega) \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

Θέμα 3. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = 1/3, \mathbf{P}(X_n = 0) = 2/3$$

για κάθε $n \geq 1$.

(α) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 1$.

(β) Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η $(X_n)_{n\geq 1}$ δεν συγκλίνει.

Λύση

1ος Σαφώς $\overline{\lim} X_n \leq 1$

$A_n = \{X_n = 1\} \quad \forall n \geq 1$

$P(A_n) = \frac{1}{3}$, A_n ανεξάρτητα

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, $P(\underbrace{\limsup A_n}_{B}) = 1$

$\omega \in B \Rightarrow X_n(\omega) = 1$ για άπειρα n

$$\overline{\lim} X_n(\omega) = 1$$

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = 1) = 1$$

(β) $\Gamma_n = \{X_n = 0\}$, $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητα

$$P(\Gamma_n) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(\Gamma_n) = \infty \xrightarrow{\text{2ο λήμμα Borel Cantelli}}$$

$$P(\underbrace{\limsup \Gamma_n}_{\Gamma}) = 1$$

Στο $\underset{\omega}{B \cap \Gamma}$ έχουμε $X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{για άπειρα } n \\ 1 & \text{για άπειρα } n \end{cases}$

$\Rightarrow \liminf X_n = 0, \quad \limsup X_n = 1$