Πιθανότητες ΙΙ. Ασκήσεις

***1.** Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ ή } X \backslash A \text{ αριθμήσιμο}\}$.

(i) Ποιες είναι οι $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$;

(ii) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ με $\mu(A) = 0$ αν το A είναι αριθμήσιμο και $\mu(A) = 1$ αν το $X \backslash A$ είναι αριθμήσιμο είναι μέτρο.

(iii) Για ποιες μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται το $\int f \, d\mu$ και πόσο είναι αυτό;

***2.** Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Για $r = 0, 1, \ldots, n$ θέτουμε

$$C_r := \{x \in \Omega : \text{το } x \text{ ανήκει σε ακριβώς } r \text{ από τα } A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

Να δειχθεί με χρήση δεικτριών ότι

$$\mathbf{P}(C_r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Το εσωτερικό πολλαπλό άθροισμα για $k = 0$ ορίζεται ίσο με 1.

***3.** (i) Αν $\varepsilon > 0$, να δειχθεί ότι

$$\inf\{\mathbf{P}(|X| > \varepsilon) : X \text{ είναι τυχαία μεταβλητή με } \mathbf{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = 1\} = 0.$$

(ii) Αν $a > 0$, να δειχθεί ότι

$$\inf\{\mathbf{P}(|X| > \varepsilon) : X \text{ είναι τυχαία μεταβλητή με } \mathbf{E}(X) = 1, \mathrm{Var}(X) = a^2\} = 0.$$

4. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει πυκνότητα f. Αν η X έχει συμμετρική κατανομή (δηλαδή $X \stackrel{d}{=} -X$), να δειχθεί ότι $f(-x) = f(x)$ λ-σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

***5.** Έστω $(X_n)_{n \geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$ για κάθε $n \geqslant 1$. Θέτουμε $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Να δειχθούν τα εξής.

(α) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ κατά πιθανότητα $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X_1 \in \mathbb{R}) = 1$.

(β) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ με πιθανότητα 1 $\Leftrightarrow \mathbf{E}|X_1| < \infty$.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ κατά πιθανότητα $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X_1 = -\infty) < 1$ και $\lim_{x\to\infty} x \mathbf{P}(X_1 > x) = 0$.

(δ) $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$ με πιθανότητα 1 $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X_1 = -\infty) < 1$ και $\mathbf{E}(X_1^+) < \infty$.

***6.** Έστω $(X_n)_{n \geqslant 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε κοινό χώρο πιθανότητας και με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X_n \neq 0 \text{ για άπειρα } n) = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \geqslant 1}$ στοιχείων του $(0, \infty)$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(a_n |X_n| \geqslant 1 \text{ για άπειρα } n) = 1$.

***7.** Η 11.13 από τις σημειώσεις.

***8.** Η 12.12 από τις σημειώσεις.

***9.** Η 13.13 από τις σημειώσεις.

***10.** Η 13.16 από τις σημειώσεις.

***11.** Η 14.10 από τις σημειώσεις.

***12.** Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $a := \mathbf{E}(X^2) \in (0, \infty)$ και $X \stackrel{d}{=} (X + X')/\sqrt{2}$, όπου X' είναι μια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από την X με $X' \stackrel{d}{=} X$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X) = 0$ και $X \sim N(0, a)$.