Μεταπτυχιακό Μιγαδικών, Ιούνιος 2022

Θέμα 1ο

Έστω $T_0=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ και $T_2=\{z\in\mathbb{C} : |z-2|=1\}$

α) Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varphi : T_2\to\mathbb{C}$ ώστε
$\varphi(z)^3=z^5$ για κάθε $z\in T_2$.

β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : T_0\to\mathbb{C}$ ώστε
$g(z)^3=z^5$ για κάθε $z\in T_0$.

Θέμα 2ο

α) Έστω f συνεχής συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο και ολόμορφη στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο. Έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε χωρίς χρήση του Θεωρήματος Mergelyan ότι υπάρχει πολυώνυμο P ώστε $|f(z)-P(z)|<\varepsilon$ $\forall z : |z|\leq 1$.

β) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $K=[-1,1]\times[-1,1]$ ολόμορφη στο εσωτερικό και έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε χωρίς χρήση του Θεωρήματος Mergelyan ότι υπάρχει πολυώνυμο Q ώστε $|f(z)-Q(z)|<\varepsilon$ για κάθε z στο K.

γ) Έστω $\delta>0$ μικρό και $L=[(-1+\delta,1-\delta)\times(-1+\delta,1-\delta)]^c$. Έστω f συνεχής στο L ολόμορφη στο εσωτερικό με $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ και έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε χωρίς χρήση του Θ. Mergelyan ότι υπάρχει πολυώνυμο R ώστε $\left|f(z)-R\left(\frac{1}{z}\right)\right|<\varepsilon$ για κάθε z στο L.

δ) Έστω K και L όπως προηγουμένως και f συνεχής στο $K\cap L$ και ολόμορφη στο εσωτερικό. Πώς τη f διασπάμε; Γιατί οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις επεκτείνονται συνεχώς σ' όλα τα σημεία του συνόρου;

ε) Έστω f όπως στο δ) και $\varepsilon>0$. Δείξτε χωρίς χρήση του Θ. Mergelyan ότι υπάρχουν πολυώνυμα P και R ώστε $\left|f(z)-\left[P(z)+R\left(\frac{1}{z}\right)\right]\right|$ $<\varepsilon$ στο $K\cap L$.

Καλή Επιτυχία