

Διαφορική Γεωμετρία 2

30/6/2025

Θέμα 1 Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και $f \in C^\infty(M)$.

i. Να δείξετε ότι ο τανυστής $\text{Hess} f = \nabla^2 f$ είναι συμμετρικός, δηλαδή $\text{Hess} f(X, Y) = \text{Hess} f(Y, X)$ και ότι $\text{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad} f, Y \rangle$.

ii. Να δείξετε ότι ο τανυστής καμπυλότητας Ricci είναι συμμετρικός.

iii. Να δείξετε ότι αν $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ και $f(x) = |x|^2$, τότε $\text{Hess} f = 2g_{\mathbb{R}^n}$.

Θέμα 2 Κάνοντας την ταύτιση $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, να δείξετε ότι η απεικόνιση $F : (0, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$ που ορίζεται ως

$$F(t, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = (\sin t \cos \theta_1, \sin t \sin \theta_1, \cos t \cos \theta_2, \cos t \sin \theta_2) \approx (\sin t \cdot e^{i\theta_1}, \cos t \cdot e^{i\theta_2}),$$

έχει πεδίο τιμών την σφαίρα $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ακτίνας 1 και είναι immersion. Επιπλέον, να βρείτε ένα κλειστό σύνολο $S \subset \mathbb{S}^3$ ώστε η F να είναι μια ισομετρία μεταξύ της πολλαπλότητας Riemann $(\mathbb{S}^3 \setminus S, g_{\mathbb{S}^3})$ και της $((0, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, g)$, όπου $g_{\mathbb{S}^3}$ είναι η συνήθης μετρική Riemann που επάγεται από την εμφύτευση στον $\mathbb{R}^4$ και $g = dt \otimes dt + \sin^2 t d\theta_1 \otimes d\theta_1 + \cos^2 t d\theta_2 \otimes d\theta_2$. Είναι η $(\mathbb{S}^3 \setminus S, g_{\mathbb{S}^3})$ πλήρης; Είναι οι καμπύλες $t \mapsto (t, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ γεωδαισιακές;

Θέμα 3 Έστω $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ μία Riemannian submersion. Έστω $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $V \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ και έστω $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ οι οριζόντιες ανυψώσεις των X, Y αντίστοιχα. Ας χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και ∇ και για τις δύο μετρικές Riemann, και τις αντίστοιχες συνοχές Levi-Civita, και ας γράψουμε $Z = Z_H + Z_V$ για τη διάσπαση ενός $Z \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ στην οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα του. Να δείξετε ότι

i. Το $[\bar{X}, V]$ είναι κατακόρυφο (vertical), και επομένως $\langle [\bar{X}, V], \bar{Y} \rangle = \langle [\bar{Y}, V], \bar{X} \rangle = 0$.

ii. $V \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = 0$.

iii. Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Koszul¹ να δείξετε ότι $\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]_V$.

Θέμα 4 Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann, και $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$, $\tilde{g} = g \oplus dt \otimes dt$. Έστω $t : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x, t) = t$, και $\partial_t \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ το διανυσματικό πεδίο με $\partial_t|_{(x_0, t_0)} f = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} f(x_0, t + t_0)$. Να δείξετε ότι

1. $\nabla \partial_t = 0$, $\text{Hess} t = 0$ και $R(\cdot, \cdot) \partial_t = 0$.

2. Έστω $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ η προβολή $\pi(x, t) = x$, $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ και $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$ διανυσματικά πεδία π -συσχετισμένα με τα X, Y, Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\nabla_X Y = \nabla_{\bar{X}} \bar{Y}$ και $R(\bar{X}, \bar{Y}) \bar{Z} = R(X, Y) Z$.

Σημείωση: χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα ∇ και $R(\cdot, \cdot)$ για τις Levi-Civita συνοχές και τους τανυστές Riemann των M και $M \times \mathbb{R}$.

¹ $\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}$