Διαφορική Γεωμετρία Ι
Εξέταση Ιανουαρίου 2023

1. (3 μονάδες) (α΄) Να υπολογίσετε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V = (x+y)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$ στον $\mathbb{R}^3$ και να υπολογίσετε την ροή του.

   (β΄) Να εξετάσετε αν $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\varphi((x,y,z),t) = (xe^t, ye^t, z+t)$ είναι ολική ροή κάποιου διανυσματικού πεδίου. Αν ναι, να το βρείτε.

   (γ΄) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ δύο διανυσματικά πεδία που μετατίθενται, με διαφορικές ροές ϑ, η αντίστοιχα και $p \in M$. Έστω $\sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ με $\sigma(t,s) = \vartheta_t \circ \eta_s(p)$. Να δείξετε ότι για κάθε $f \in C^\infty(M)$ ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \sigma) = (XYf) \circ \sigma.$$

2. (3 μονάδες) Έστω ω η 1-μορφή στον $\mathbb{R}^3$ με

$$\omega_{(x,y,z)}\left(a\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y,z)} + b\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y,z)} + c\frac{\partial}{\partial z}|_{(x,y,z)}\right) = -xa - yb + c.$$

   (α΄) Να βρείτε αν υπάρχει $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $\omega = df$.

   (β΄) Αν f είναι μια C^∞ απεικόνιση με τις ιδιότητες του (α΄), να εξετάσετε αν τα σύνολα $S_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = \lambda\}$ είναι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^3$.

   (γ΄) Να εξετάσετε αν η κατανομή D με $D_{(x,y,z)} = \ker \omega_{(x,y,z)}$ είναι involutive. Αν είναι, να βρείτε τις ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες της D και έναν χάρτη του $\mathbb{R}^3$ επίπεδο ως προς την κατανομή D.

3. (2 μονάδες) (α΄) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και ω μια 1 - μορφή της M με $\omega_p \neq 0_p \in T_p^*M$, για κάθε $p \in M$. Να δείξετε ότι η κατανομή $D_p = \ker \omega_p$ είναι μια $(n-1)$ involutive κατανομή.

   Υπόδειξη : Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που η ω είναι ακριβής.

   (β΄) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $h \in C^\infty(M)$ και $p \in M$ τέτοιο ώστε $dh_p = 0$. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $L\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R}$ $L(X,Y) = X_p(Y(h))$ είναι συμμετρική (δηλαδή $L(X,Y) = L(Y,X)$) και C^∞ - γραμμική (για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$ ισχύει $L(fX, gY) = fgL(X,Y)$). Δείξτε επίσης ότι η L ορίζει μια συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $\tilde{L}\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, ώστε αν $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, τότε $\tilde{L}(X_p, Y_p) = L(X,Y)$.

4. (2 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $V \in \mathcal{X}(M)$ με $V_p \neq 0_p \in T_pM$, για κάθε $p \in M$. Να δείξετε ότι υπάρχει μια 1-μορφή $\omega \in \Gamma(T^*M)$ της M τέτοια ώστε $\omega(V) > 0$ στην M. Ως $\omega(V)$ ορίζουμε την C^∞ συνάρτηση $p \mapsto (\omega(V))(p) := \omega_p(V_p)$.

   Υπόδειξη : Λύστε το πρόβλημα πρώτα τοπικά, σε ένα σύστημα συντεταγμένων.