Διαφορική Γεωμετρία I
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2022

1. (α΄) (2 μονάδες) Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες, $F\colon M \to N$ μια λεία απεικόνιση και $V_1, V_2 \in \mathcal{X}(M)$, $W_1, W_2 \in \mathcal{X}(N)$ διανυσματικά πεδία ώστε για κάθε $i = 1, 2$ τα V_i, W_i να είναι F - συσχετισμένα. Να δείξετε ότι για κάθε $p \in M$, ισχύει η σχέση $F_*[V_1, V_2]_p = [W_1, W_2]_{F(p)}$.

   (β΄) (2 μονάδες) Θεωρήστε τα διανυσματικά πεδία $V = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$, $W = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ στον $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε, αν υπάρχει, σύστημα συντεταγμένων (U, φ), $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε $V|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$ και $W|_U = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Να δείξετε επίσης ότι η επιφάνεια $z = xy$ είναι μια ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της κατανομής που παράγεται από τα V και W.

2. (2 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $p \in M$ και $V_p \in T_pM$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει λείο διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ ώστε $X_p = V_p$.

3. (2 μονάδες) Έστω M μια συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα και $f\colon M \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ το οποίο να είναι f - συσχετισμένο με το διανυσματικό πεδίο $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$.

   (β΄) Να υπολογίσετε την 1 - μορφή $\omega = f^*dt$ της M.

4. (3 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα $X \in \mathcal{X}(M)$ ένα πλήρες διανυσματικό πεδίο με διαφορική ροή $\varphi_t\colon M \to M$, $t \in \mathbb{R}$ και ω μια 1 - μορφή στην M. Να αποδείξετε τα παρακάτω :

   (α΄) Να αποδείξετε ότι η αντιστοιχία, για κάθε $p \in M$ και $W_p \in T_pM$,

$$W_p \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\varphi_t^*\omega\right)(W_p) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\varphi_t^*\omega\right)(W_p) - \omega_p(W_p)}{t} \in \mathbb{R}$$

   ορίζει μια λεία 1 - μορφή στην M. Αυτήν την 1 - μορφή τη συμβολίζουμε ως $L_X\omega$ και την αποκαλούμε *παράγωγο Lie* της ω ως προς το X.

   (β΄) Να δείξετε ότι αν η ω είναι μια κλειστή 1 - μορφή, τότε $L_X\omega = d\left(\omega(X)\right)$.
   Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για τα σημεία $p \in M$, όπου $X_p \neq 0$, επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων γύρω από το p που ικανοποιεί $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

   (γ΄) Να αποδείξετε ότι αν η ω είναι κλειστή, και $\gamma\colon [0,1] \to M$ είναι μια λεία καμπύλη στην M, $\gamma_t = \varphi_t \circ \gamma$, τότε

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\gamma_t} \omega = \omega_{\gamma(1)}\left(X_{\gamma(1)}\right) - \omega_{\gamma(0)}\left(X_{\gamma(0)}\right).$$