Άλγεβρα ΙΙ
Εξέταση Εαρινού Εξαμήνου 2024

Θέμα 1ο : Έστω $R = \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ και $M = \mathbf{M}_{2\times 1}(\mathbf{R})$. Έστω $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$.

1) Δείξτε ότι το M είναι κυκλικό R-πρότυπο με γεννήτορα m.

2) Υπολογίστε τους μηδενιστές $Ann_R(M)$ και $Ann_R(m)$.

3) Είναι το M απλό R-πρότυπο ;

4) Είναι ο R απλός δακτύλιος ;

5) Υπολογίστε το ριζικό Jacobson του R.

Θέμα 2ο : Έστω R ένας δακτύλιος, M ένα αριστερό R-πρότυπο της Noether και $\phi : M \to M$ ένας επιμορφισμός R-προτύπων. Δείξτε ότι η ϕ είναι ισομορφισμός.

Θέμα 3ο :

(α) Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) όλες τις ημιαπλές $\mathbf{C}$-άλγεβρες διάστασης 10. Μπορεί κάθε μία από αυτές να προκύψει ως άλγεβρα ομάδας $\mathbf{C}G$ μιας ομάδας G τάξης 10;

(β) Υπάρχει πεπερασμένη ομάδα $G \not\simeq \mathbf{Z}_{10}$ τέτοια ώστε $\mathbf{C}G \simeq \mathbf{C}\mathbf{Z}_{10}$

(γ) Από εδώ και στο εξής, θεωρούμε την διεδρική ομάδα

$$D_{10} = \langle r, s \mid r^5 = s^2 = (sr)^2 = 1 \rangle$$

που είναι η ομάδα συμμετριών του κανονικού πενταγώνου. Οι κλάσεις συζηγίας της D_{10} είναι :

$$\{1\} \ \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} \ \{r, r^4\} \ \{r^2, r^3\}$$

1) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : D_{10} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ με

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου $\theta = 2\pi/5$ είναι αναπαράσταση της D_{10}.

2) Δείξτε ότι η παραπάνω αναπαράσταση είναι ανάγωγη.

3) Κατασκευάστε τον πίνακα χαρακτήρων της D_{10}

4) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα χαρακτήρων, να βρείτε τις κανονικές υποομάδες τις D_{10}.

5)Έστω μια αναπαράσταση της D_{10} επί του $\mathbf{C}$ με χαρακτήρα χ. Δείξτε ότι αν $\chi(s) = 0$, τότε $\chi(1)$ είναι άρτιος.

6) Είναι η ομάδα D_{10} επιλύσιμη;