Άλγεβρα ΙΙ
Εξέταση Εαρινού Εξαμήνου 2018-2019

Θέμα 1ο *(1+1 = 2 μονάδες)* Έστω R ένας δακτύλιος, M ένα απλό R-πρότυπο, n ένας φυσικός αριθμός και N ένα υποπρότυπο του M^n. Να δείξετε ότι :

(i) Κάθε απλό υποπρότυπο του N είναι ισόμορφο με το M.

(ii) Υπάρχει φυσικός αριθμός $k \leqslant n$, έτσι ώστε $N \simeq M^k$.

Θέμα 2ο *(1+2+1 = 4 μονάδες)* Έστω n φυσικός αριθμός και R υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ των $n \times n$ πινάκων με εγγραφές από το σώμα $\mathbf{C}$, ο οποίος περιέχει όλους τους διαγώνιους πίνακες της μορφής $z \cdot I_n$, με $z \in \mathbf{C}$. Για κάθε ένα από τους επόμενους ισχυρισμούς να εξηγήσετε αν αυτός είναι σωστός ή λανθασμένος :

(i) Ο δακτύλιος $R/\mathrm{rad}(R)$ είναι ημιαπλός.

(ii) Υπάρχει φυσικός $k \leqslant n^2$ με $(\mathrm{rad}(R))^k = 0$

(iii) Αν ο R είναι αριστερά primitive, τότε ο R είναι ημιαπλός.

Θέμα 3ο *(1+2 = 3 μονάδες)* Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbf{C}$ των μιγαδικών αριθμών με $\dim_{\mathbf{C}} V = \infty$ και $R = \mathrm{End}_{\mathbf{C}} V$ ο δακτύλιος των ενδομορφισμών του V. Για κάθε ένα από τους επόμενους ισχυρισμούς να εξηγήσετε αν αυτός είναι σωστός ή λανθασμένος :

(i) Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες του I του R, υπάρχει στοιχείο $x \in R$ ώστε $I = Rx$

(ii) Για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R, υπάρχει στοιχείο $x \in R$ ώστε $I = Rx$.

Θέμα 4ο *(2 μονάδες)* Η εναλλάσουσα ομάδα A_4 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbf{C}^4$ μέσων γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν την κανονική βάση. (Έτσι για παράδειγμα, $(1\ 2\ 3) \cdot (e_1 - 2e_2 + 3e_3 + 15e_4) = e_2 - 2e_3 + 3e_1 + 15e_4$). Να υπολογίσετε τον χαρακτήρα χ_V, καθώς και το εσωτερικό γινόμενο $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$

Η διάρκεια εξέτασης είναι 2,5 ώρες
Καλή επιτυχία !