Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ

Εξέταση Ιουνίου 2019

Πρόβλημα 1. (1 + 1 = 2 μονάδες)

Έστω R ένας δακτύλιος, M ένα απλό R-πρότυπο, n ένας φυσικός αριθμός και N ένα υποπρότυπο του M^n. Να δείξετε ότι:

(α) Κάθε απλό υποπρότυπο του N είναι ισμόμορφο με το M.

(β) Υπάρχει φυσικός αριθμός k με $k \leq n$, έτσι ώστε $N \approx M^k$.

Πρόβλημα 2. (1 + 2 + 1 = 4 μονάδες)

Έστω n ένας φυσικός αριθμός και R ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου $M_n(\mathbf{C})$ των nxn πινάκων με εγγραφές από το σώμα **C**, ο οποίος περιέχει όλους τους διαγώνιους πίνακες της μορφής $z \cdot I_n$ με $z \in \mathbf{C}$. Για κάθε έναν από τους επόμενους ισχυρισμούς, να εξηγήσετε αν αυτός είναι σωστός ή λανθασμένος:

(α) Ο δακτύλιος πηλίκο R/rad R είναι ημιαπλός.

(β) Υπάρχει φυσικός αριθμός k με $k \leq n^2$, έτσι ώστε $(\text{rad } R)^k = 0$.

(γ) Αν ο R είναι αριστερά πρωταρχικός, τότε ο R είναι ημιαπλός.

Πρόβλημα 3. (1 + 2 = 3 μονάδες)

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος **C** των μιγαδικών αριθμών με $\dim_{\mathbf{C}} V = \infty$ και $R = \text{End}_{\mathbf{C}} V$ ο δακτύλιος των γραμμικών μετασχηματισμών του V. Για κάθε έναν από τους επόμενους ισχυρισμούς, να εξηγήσετε αν αυτός είναι σωστός ή λανθασμένος:

(α) Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες I του R υπάρχει στοιχείο $r \in R$, έτσι ώστε $I = Rr$.

(β) Για κάθε αριστερό ιδεώδες I του R υπάρχει στοιχείο $r \in R$, έτσι ώστε $I = Rr$.

Πρόβλημα 4. (2 μονάδες)

Η εναλλάσσουσα ομάδα A_4 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbf{C}^4$ μέσω γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν την κανονική του βάση. (Έτσι, για παράδειγμα, είναι $(123) \cdot (7,-8,35,-24) = (35,7,-8,-24)$.) Να υπολογίσετε τον χαρακτήρα χ_V της αναπαράστασης αυτής, καθώς και το εσωτερικό γινόμενο $[\chi_V, \chi_V]$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2,5 ώρες. Καλή επιτυχία!