Άλγεβρα ΙΙ
Εξετάσεις Ιουνίου 2018

Πρόβλημα 1. (2 μονάδες)
Έστω R ένας δακτύλιος, V ένα απλό R-πρότυπο και $n \geq 1$ ένας ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι κάθε R-υποπρότυπο U του ευθέος αθροίσματος $V^n = V \oplus V \oplus \ldots \oplus V$ (n προσθετέοι) είναι ένα άθροισμα R-προτύπων που είναι ισόμορφα με το V.

Πρόβλημα 2. (2 μονάδες)
Έστω R, S δύο δακτύλιοι και $f : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων, ο οποίος είναι επί. Να δείξετε ότι $f(\operatorname{rad} R) \subseteq \operatorname{rad} S$.

Πρόβλημα 3. (2 μονάδες)
Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος και $x, y \in R$ δύο στοιχεία, τέτοια ώστε $xy = 1$. Να δείξετε ότι $yx = 1$.

Πρόβλημα 4. (3 μονάδες)
Η ομάδα S_5 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^5 = \bigoplus_{i=1}^5 \mathbb{C}e_i$ μέσω γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_5$. (Έτσι, είναι $(23) \cdot (3e_1 + e_2 - 4e_3) = 3e_1 + e_3 - 4e_2$.) Θεωρούμε τον αναλλοίωτο υπόχωρο $U = \mathbb{C}e$, όπου $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$, και το πηλίκο $M = V/U$. Είναι το M ανάγωγο ως $\mathbb{C}S_5$-πρότυπο; Εξηγήστε.

Πρόβλημα 5. (2 μονάδες)
Θεωρούμε έναν αριστερά primitive δακτύλιο R και ένα απλό και πιστό R-πρότυπο M. Αν $I \subseteq R$ είναι ένα μη-μηδενικό δεξιό ιδεώδες του R και $x \in M$ ένα μη-μηδενικό στοιχείο του M, να δείξετε ότι υπάρχει $r \in I$, τέτοιο ώστε $rx \neq 0$.

Η διάρκεια της εξετασης είναι 2,5 ώρες.
Καλή επιτυχία!