

Άλγεβρα Β
Εξέταση 17/6/2016

Επώνυμο

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Όνομα
ΑΜ**

1	2	3	4		Σύνολο
----------	----------	----------	----------	--	---------------

**Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
Καλή επιτυχία.**

Θέμα 1 (2.5 μον) Έστω R δακτύλιος. Δείξτε τα εξής.

α) Αν ο R είναι ημιαπλός, τότε και ο $M_n(R)$ είναι ημιαπλός.

β) Αν ο R έχει συνθετική σειρά ως R -πρότυπο, τότε ο $M_n(R)$ έχει συνθετική σειρά ως $M_n(R)$ -πρότυπο.

γ) Αν ο R είναι του Artin και δεν έχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία, τότε είναι ισόμορφος με ευθύ γινόμενο δακτυλίων διαίρεσης.

Θέμα 2 (2 μον)

α) Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός \mathbb{R} -αλγεβρών $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M_4(\mathbb{R})$.

β) Ταξινομήστε ως προς ισομορφισμό τους ημιαπλούς δακτύλιους που έχουν 100 στοιχεία.

Θέμα 3 (1.5 μον)

α) Διατυπώστε και αποδείξτε την εκδοχή του λήμματος του Schur για αλγεβρικά κλειστό σώμα.

β) Έστω χ ανάγωγος χαρακτήρας ομάδας G τάξης n . Αν $g \in G$, θέτουμε $\lambda_g = \frac{n}{|C(g)|} \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$.

1. Δείξτε ότι ο μιγαδικός αριθμός λ_g είναι αλγεβρικός ακέραιος για κάθε $g \in G$.
2. Αληθεύει ότι αν το $g \in G$ είναι τέτοιο ώστε $\chi(g) \in \mathbb{Z}$, τότε $\lambda_g \in \mathbb{Z}$;

Θέμα 4 (2 μον) Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του $V = \mathbb{C}^3$ και $U = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \mid a_i \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$. Το V είναι $\mathbb{C}[S_3]$ -πρότυπο με δράση $\sigma v_i = v_{\sigma(i)}$, $\sigma \in S_3$. Το U είναι $\mathbb{C}[S_3]$ -υποπρότυπο του V .

α) Υπολογίστε τους χαρακτήρες των $\mathbb{C}[S_3]$ -προτύπων U και $U \otimes_{\mathbb{C}} U$.

β) Αληθεύει ότι το $U \otimes_{\mathbb{C}} U$ περιέχει $\mathbb{C}[S_3]$ -υποπρότυπο ισόμορφο με το U ;

γ) Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\text{Hom}_{\mathbb{C}[S_3]}(U, \mathbb{C}[S_3])$;

Πρόχειρο 1/3

Πρόχειρο 2/3

Πρόχειρο 3/3