# **Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ** Σεπτέμβριος 2007

1. Υπολογίστε το ριζικό του Jacobson του $\mathbb{Z}_{2007}$. Είναι ο $\mathbb{Z}_{2007}$ ημιαπλός; Πόσα απλά ανά δυο μη ισόμορφα πρότυπα έχει ο $\mathbb{Z}_{2007}$.

2. Έστω *M* ένα *R*-πρότυπο.
    a. Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος $End_R(M)$ είναι δακτύλιος διαίρεσης, αν το *M* είναι απλό.
    b. Αποδείξτε ότι αν το *M* είναι πεπερασμένα παραγόμενο ημιαπλό *R*-πρότυπο, τότε ο δακτύλιος $End_R(M)$ είναι ημιαπλός.

3. Έστω *G* μια ομάδα τάξης 10 για την οποία η άλγεβρα $\mathbb{C}[G]$ έχει τουλάχιστον 8 ανά δύο μη ισόμορφα απλά πρότυπα. Αποδείξτε ότι $G \simeq \mathbb{Z}_{10}$.

4. Αν για το χαρακτήρα $\chi$ μια ομάδας $G$ ισχύει $\chi(g) = 0$ για κάθε $g \in G, g \neq 1$, αποδείξτε ότι ο $\chi$ είναι της μορφής $m\rho$, όπου *m* είναι μη αρνητικός ακέραιος και $\rho$ η κανονική αναπαράσταση της *G*.

5. Έστω χ χαρακτήρας της συμμετρικής ομάδας $S_3$ για τον οποίο ισχύει χ(1) = 3, χ(12) = 0 , χ(123) = -1, και έστω *V* το αντίστοιχο $\mathbb{C}[S_3]$ πρότυπο. Να βρεθεί η ανάγωγη ανάλυση του χαρακτήρα του $V\otimes V$.

6. Έστω *k* ένα σώμα.
    a. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $Aut\left(M_n\left(k\right)\right) \cong \dfrac{GL_n\left(k\right)}{C}$, όπου $C = \left\{aI \,\middle|\, a \in k - \{0\}\right\}$.
    b. Αληθεύει ότι το τανυστικό γινόμενο δυο *k*-αλγεβρών διαίρεσης είναι πάντα *k* άλγεβρα διαίρεσης;

Βαθμολογικά τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Καλή επιτυχία