Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ 7 Ιουνίου 2001

(με ανοικτές σημειώσεις)

1. Ταξινομήστε τους ημιαπλούς δακτυλίους που έχουν 2001 στοιχεία.

2. Αληθεύει ότι κάθε απλή ομάδα με τάξη το πολύ 41 και όχι 30 έχει τάξη πρώτο αριθμό;

3. Έστω R ημιαπλός δακτύλιος. Δείξτε ότι ο $M_n(R)$ έχει συνθετική σειρά (ως αριστερό πρότυπο πάνω από τον εαυτό του).

4. Έστω M ένα R-πρότυπο του Artin και $f{:}M \rightarrow M$ μονομορφισμός. Δείξτε ότι ο f είναι ισομορφισμός.

5. Έστω k σώμα χαρακτηριστικής $p \geq 0$ και G πεπερασμένη ομάδα τάξης n. Συμπληρώστε την ακόλουθη διατύπωση και δώστε μια απόδειξη. ‘ Το ριζικό του Jacobson του k[G] είναι μηδέν αν και μόνο αν για τα p και n ισχύει ...’

6. α) Αληθεύει ότι το τανυστικό γινόμενο δύο κεντρικών k αλγεβρων διαίρεσης (k σώμα) είναι κεντρική k άλγεβρα διαίρεσης; β) Αληθεύει ότι το τανυστικό γινόμενο δύο ημιαπλών □ αλγεβρών είναι ημιαπλή □ άλγεβρα;

7. Έστω χ χαρακτήρας της συμμετρικής ομάδας S_3 για τον οποίο ισχύει $\chi(1) = 3$, $\chi(12) = 0$, $\chi(123) = -1$, και έστω V το αντίστοιχο □[S_3] πρότυπο. Να βρεθεί η ανάγωγη ανάλυση του χαρακτήρα του $V \otimes V$.

8. Συμπληρώστε τον πίνακα χαρακτήρων της ομάδας των quaternions Q = $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

	1	-1	i	j	k
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1		-1
χ_4	1	1		-1	1
χ_5					

9. α) Αποδείξτε ότι αν U και V είναι □[G] πρότυπα με dimU=1 και V ανάγωγο, τότε το $U \otimes V$ είναι ανάγωγο. β) Αν οι πεπερασμένες ομάδες G και H έχουν s και t ανάγωγους χαρακτήρες αντίστοιχα, αποδείξτε ότι η GxH έχει st ανάγωγους χαρακτήρες.

Απαντήστε το πολύ σε 7 ερωτήματα. Βαθμολογικά, όλα είναι ισοδύναμα. Καλή επιτυχία