Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ - Σεπτέμβριος 2018

Επιμέλεια Λύσεων : Κωνσταντίνος Μπιζάνος

1. (2 μονάδες) Έστω R ένας δακτύλιος και V ένα απλό R - πρότυπο. Θεωρούμε ένα R - πρότυπο M και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n και υποπρότυπα $M_1, \ldots, M_n \subseteq M$ τέτοια ώστε $M_i \cong V$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $M = M_1 + \cdots + M_n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός k, τέτοιος ώστε $M \cong V^k$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μεγιστικό υποσύνολο $\{i_1, \ldots, i_k\}$ του $\{1, \ldots, n\}$, ώστε $M = \bigoplus_{j=1}^{k} M_{i_j} \cong \prod_{j=1}^{k} M_{i_j} \cong V^k$.

2. (2 μονάδες) Έστω R ένας δακτύλιος, $I \subseteq R$ και $\overline{R} = R/I$ ο αντίστοιχος δακτύλιος πηλίκο. Αν $J = I + \mathrm{rad}(R) \subseteq R$, να αποδείξετε ότι $J/I \subseteq \mathrm{rad}(\overline{R})$.

Λύση. Έστω $x + I \in \overline{R}$ και $i + r + I \in J/I$, όπου $i \in I$ και $r \in \mathrm{rad}(R)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $[1 - x(i + r)] + I \in U(\overline{R})$. Όμως, παρατηρούμε ότι

$$[1 - x(i + r)] + I = 1 - xr - \underbrace{xi}_{\in I} + I = 1 - xr + I \in U(\overline{R})$$

αφού $1 - xr \in U(R)$.

3. (2 μονάδες) Έστω R ένας δακτύλιος, V ένα απλό R - πρότυπο και $E = \mathrm{End}_R V$ ο δακτύλιος των ενδομορφισμών του. Αν $x, y \in E$ είναι δύο στοιχεία με $xy = 1_E$, να δείξετε ότι $yx = 1_E$.

Λύση. Από την δεσμένη σχέση, αφού x έχει δεξιά αντίστροφο, τότε x είναι επιμορφισμός. Αφού V είναι απλό συμπεραίνουμε ότι $\ker x = 0$, επομένως x είναι ισομορφισμός. Αρκεί να δείξουμε ότι η αριστερή αντίστροφος h ισούται με y. Πράγματι,

$$y = 1_E \circ y = h \circ x \circ y = h \circ 1_E = h.$$

4. (2 μονάδες) Η ομάδα S_5 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^5 = \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{C}e_i$ μέσω των γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν τα διανύσματα e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. [1] Θεωρούμε τον αναλλοίωτο υπόχωρο $U = \mathbb{C}e$, όπου $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$, και το $\mathbb{C}S_5$ - πρότυπο πηλίκο $M = V/U$. Να υπολογίσετε τον χαρακτήρα χ_M του M.

Λύση. Αρχικά σημειώνουμε τις κλάσεις συζυγίας τις ομάδας S_6 καθώς και το πλήθος αυτών

(**1**)	Cl(1)	(**2**)	Cl(12)
(**3**)	Cl(123)	(**4**)	Cl(1234)
(**5**)	Cl(12345)	(**6**)	Cl(12)(34)
(**7**)	Cl(12)(345)		

Επομένως, ο πίνακας των χαρακτήρων είναι ο ακόλουθος :

χ_M	1	(12)	(123)	(1234)
	4	2	1	0
	(12345)	(12)(34)	(12)(345)	
	-1	0	-1	

5. (2 μονάδες) Θεωρούμε έναν πεπερασμένο δακτύλιο R, ο οποίο είναι αριστερά primitive. Να δείξετε ότι ο P είναι ημιαπλός.

Λύση. Αφού R είναι πεπερασμένος, τότε είναι αριστερά Artinian και αφού R είναι αριστερά primitive, τότε είναι Jacobson ημιαπλός. Από τις προηγούμενες δύο παρατηρήσεις έχουμε το ζητούμενο.

[1] Έτσι, για παράδειγμα, είναι $(13) \cdot (e_1 + 3e_2 - 5e_3) = e_3 + 3e_2 - 5e_1$