

Εξέταση Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών

28 Ιουνίου 2024

1. Αν το A^m είναι κύριο ιδεώδες και το m είναι πρώτο με τον αριθμό κλάσεων τότε και το A είναι κύριο ιδεώδες.
2. Να υπολογιστεί ο αριθμός κλάσεων του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Δίνεται ότι η σταθερά του Minkowski είναι < 2.85 .
3. Να υπολογιστεί μια βάση ακαιρεότητας για το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z}$, d ελεύθερο τετραγώνου, ως συνάρτηση του d .
4. Να αποδειχτεί ότι για κάθε αλγεβρικό σώμα αριθμών K η διακρίνουσά του D_K ικανοποιεί την σχέση

$$D_K \equiv 0, 1 \pmod{4}$$

5. Έστω L/K επέκταση σωμάτων αριθμών με δακτυλίους ακέραιων αλγεβρικών R_L και R_K . Αν Q πρώτο ιδεώδες του R_L δείξτε ότι $Q \cap R_K$ είναι πρώτο ιδεώδες του R_K .
6. Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ και δίνεται ότι οι ακέραιοι αλγεβρικοί του σώματος είναι ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})$. Να βρεθούν τα ιδεώδη του R που διαιρούν το 7 και το 5.
7. Θεωρούμε την επέκταση Galois $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$. Να βρεθούν τα σώματα ανάλυσης και αδράνειας για το ιδεώδες $5\mathbb{Z}$.
8. Σε μία επέκταση Galois L/K να αποδειχθεί ότι το σώμα (Q/P) για ιδεώδη Q και P των δακτυλίων ακέραιων αλγεβρικών των L και αντίστοιχα με Q πάνω από το P , είναι το μέγιστο υπόσωμα του L που περιέχει το Q ώστε $f(Q_Z/P) = e(Q_Z/P) = 1$. Το Q_Z είναι το πρώτο ιδεώδες του K_Z κάτω από το Q .

Καλή επιτυχία!!
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες