ΑΝΑΛΥΣΗ 2
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020

Ομάδα Α.

Α.1. Έστω X αυτοπαθής και διαχωρίσιμος χώρος Banach. Δείξτε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B_X} = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ του X εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Α.2. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα του Goldstine.

Α.3. Έστω X διανυσματικός χώρος και $g, f_1, \dots, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ γραμμικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.

(β) Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τέτοιοι ώστε $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$.

Ομάδα Β.

Β.1. Έστω X χώρος Banach, και έστω (x_n) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in \mathrm{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε $\|y\| < \varepsilon$. Συμπεράνετε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) στο $\mathrm{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέοια ώστε $y_n \to 0$.

Β.2. Έστω X χώρος Banach, και (x_n) και (y_n) δύο ακολουθίες στην S_X. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ότι η (y_n) είναι ισοδύναμη με την standard βάση του ℓ_1, δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $C \geqslant c > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ έχουμε $c\sum_{n=1}^{k} |a_k| \leqslant \|\sum_{n=1}^{k} a_n y_n\| \leqslant C\sum_{n=1}^{k} |a_n|$. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{c}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο γραμμικός τελεστής $T \colon \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ που ορίζεται με

$$T\Big(\sum_{n=1}^{k} a_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^{k} a_n y_n,$$

επεκτείνεται σε γραμμικό *ισομορφισμό* $\tilde{T} \colon \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\mathrm{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ομάδα Γ.

Γ.1. Έστω (I_n) ακολουθία ξένων ανά δύο, κλειστών διαστημάτων του $[0,1]$ με μήκος $|I_n| = 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $f_n = 2^n \mathbf{1}_{I_n} \in L_1([0,1])$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω, επίσης, (r_n) η ακολουθία Rademacher. Δείξτε ότι υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathrm{span}\{f_n : n \geqslant k\}$ και κάθε $y \in \mathrm{span}\{r_n : n \geqslant k\}$ τέτοια ώστε $\|x\|_{L_1([0,1])} = \|y\|_{L_1([0,1])} = 1$ έχουμε ότι $\|x - y\|_{L_1([0,1])} \geqslant \delta$. Μπορείτε να εκτιμήσετε τη σταθερά δ;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!