ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Παρασκευή 28 Ιουνίου 2019

Ομάδα Α.

Α.1. Έστω X διανυσματικός χώρος, και $K \subseteq X$ κυρτό με το $0 \in K$ γεωμετρικό εσωτερικό του K. Δείξτε ότι το συναρτησιακό Minkowski p_K του K είναι καλά ορισμένο υπογραμμικό συναρτησιακό, και ικανοποιεί $\{x \in X : p_K(x) < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in X : p_K(x) \leqslant 1\}$.

Α.2. Έστω X χώρος Banach τέτοιος ώστε ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Δείξτε ότι και ο X είναι διαχωρίσιμος.

Α.3. Έστω X χώρος Banach. Δείξτε ότι ο X είναι απειροδιάστατος αν και μόνο αν $\overline{S_X}^w = \overline{B_X}$ όπου $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ και $\overline{B_X} = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Α.4. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Krein–Milman.

Α.5. Δείξτε ότι για κάθε $2 \leqslant p < +\infty$ ο χώρος $L_p([0,1])$ είναι αυτοπαθής. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Clarkson.)

Ομάδα Β.

~~Β.1.~~ Έστω X χώρος Banach, και έστω (x_n) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in \mathrm{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε $\|y\| < \varepsilon$. Συμπεράνετε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) στο $\mathrm{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέοια ώστε $y_n \to 0$.

Β.2. Έστω X χώρος Banach, και (x_n) και (y_n) δύο ακολουθίες στην S_X. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ότι η (y_n) είναι ισοδύναμη με την standard βάση του ℓ_1, δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $C \geqslant c > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ έχουμε $c\sum_{n=1}^k |a_k| \leqslant \|\sum_{n=1}^k a_n y_n\| \leqslant C\sum_{n=1}^k |a_n|$. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{c}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο γραμμικός τελεστής $T\colon \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ που ορίζεται με

$$T\Big(\sum_{n=1}^k a_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^k a_n y_n,$$

επεκτείνεται σε γραμμικό *ισομορφισμό* $\tilde{T}\colon \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\mathrm{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Β.3. Έστω X χώρος Banach, και έστω (x_n) ακολουθία στην S_X. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Έστω, επίσης, (y_n) ακολουθία στην S_X η οποία είναι ισοδύναμη με την standard βάση του ℓ_1 (δες Β.2.). Δείξτε ότι

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| > 0.$$

Β.4. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_\infty([0,1])$. Έστω, επίσης, (r_n) η ακολουθία Rademacher. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ με $g_n(t_1,t_2) = r_n(t_1)\cdot f_n(t_2)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < +\infty$ υπάρχει καθολική σταθερά $c(p) > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\Big\|\sum_{n=1}^k g_n\Big\|_{L_p([0,1]^2)} \geqslant c(p)\,\Big\|\Big(\sum_{n=1}^k f_n^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L_p([0,1])}.$$

Μπορείτε να εκτιμήσετε τη σταθερά $c(p)$?

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!