# Αρμονική Ανάλυση

15 Ιουλίου 2022

**1.** Απαντήστε στα ακόλουθα.

(α) Δώστε τον ορισμό του πυρήνα αθροισιμότητας στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$.

(γ) Έστω $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ και $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ πυρήνας αθροισιμότητας στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ισχύει $\lim_{\lambda\to\infty}^{L^1(\mathbb{R})} k_\lambda * f = f$.

**2.** Έστω $\mu \in \mathcal{M}_r(\mathbb{T})$.

(α) Αν $t \in \mathbb{T}$, τότε δείξτε ότι $\mu(\{t\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} e^{itk}\hat{\mu}(k)$.

(β) Δείξτε ότι $\frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{\mu}(k)|^2 \to \sum_{t\in\mathbb{T}} |\mu(\{t\})|^2$.

**3.** Δείξτε τα ακόλουθα.

(α) Έστω $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ και $\theta_0 \in \mathbb{T}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f'(\theta_0)$. Δείξτε ότι $s_n(f)(\theta_0) \to f(\theta_0)$.

(β) Έστω $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ και $I \subseteq \mathbb{T}$ ανοιχτό τέτοια ώστε $f|_I = g|_I$. Τότε για κάθε $\theta_0 \in I$ έχουμε $s_n(f)(\theta_0) = f(\theta_0)$ αν και μόνο αν $s_n(g)(\theta_0) = g(\theta_0)$.

**4.** Έστω $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ και $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$.

(α) Δείξτε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \neq 0$ ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ikx} g(nx)\mathrm{d}x \to 0$.

(β) Αν η $f$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε δείξτε ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\mathrm{d}x \to \hat{f}(0)\hat{g}(0)$.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\mathrm{d}x \to \hat{f}(0)\hat{g}(0)$.

**5.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\liminf_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}\lambda(y) = \infty$.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**