Αρμονική Ανάλυση Τύρος
6 Ιουλίου 2020

1. Δείξτε τα ακόλουθα.

(α) Έστω $X = C(\mathbb{T})$ ή $\cancel{X} = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ με $1 \leq p < \infty$. Δείξτε ότι έχουμε συγκλιση ως προς νόρμα στον X αν και μόνο αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|_{B(X,X)} < \infty$, όπου $s_n : X \to X$ με κανόνα $s_n(f) = D_n * f$ για κάθε $f \in X$ και $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ο πυρήνας Dirichlet.

(β) Στον $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ έχουμε σύγκλιση ως προς νόρμα; Αιτιολογίστε πλήρως την απάντησή σας.

(Υπενθύμιση: $D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.)

2. Ταυτίστε το $\mathbb{T}$ με το διάστημα $[-\pi, \pi)$ και θεωρήστε $f(t) = t^2$.

(α) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f.

β) Υπολογίστε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3. Δείξτε τα ακόλουθα.

(α) Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ απολύτως συνεχής, τέτοια ώστε $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$ για κάθε $\xi \neq 0$. (Υπενθύμιση: Αν f απολύτως συνεχής, τότε για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.)

(β) Δείξτε ότι $C_c^2(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq A(\hat{\mathbb{R}})$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

διαρκεια εξετασης : 2 ώρες