

Θεωρία Τελεστών

Εξετάσεις Ιουνίου 2025

1. (α) Δείξτε ότι το σύνολο των χαρακτήρων της C^* άλγεβρας $c_0(\mathbb{N})$ εφοδιασμένο με την ασθενή * -τοπολογία δεν είναι συμπαγής χώρος.

(β) Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα και $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μια θετική γραμμική μορφή $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ νορμας 1 ώστε $\omega(a^*a) = \|a\|^2$.

2. (α) Δώστε τον ορισμό της C^* άλγεβρας και του συστήματος τελεστών (operator system).

Είναι αλήθεια ότι κάθε σύστημα τελεστών είναι C^* άλγεβρα; [Απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.]

(β) Δείξτε ότι αν $\mathcal{S}$ είναι σύστημα τελεστών, κάθε $a \in \mathcal{S}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων που ανήκουν στο $\mathcal{S}$.

(γ) Δείξτε ότι η $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$ με πράξεις και ενέλιξη κατά συντεταγμένη δεν είναι C^* άλγεβρα (εδώ $\|(z, w)\|_1 := |z| + |w|$).

3. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό.

Αν $f : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, εξηγήστε αναλυτικά πώς ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}$.

Δείξτε ότι $\sigma(f(a)) = \{f(t) : t \in \sigma(a)\}$.

4. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα 1 και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια μεταθετική C^* υπόαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει τη μονάδα. Δείξτε ότι μια πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή $\omega : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ επεκτείνεται σε θετική γραμμική μορφή $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Είναι κάθε τέτοια επεκταση στην $\mathcal{A}$ πολλαπλασιαστική;

5. Δείξτε ότι κάθε $n \times n$ πίνακας $[a_{ij}]$ τελεστών $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ ορίζει φραγμένο τελεστή A στον H^n (όπου $H^n = H \oplus H \oplus \dots \oplus H$) μέσω πολλαπλασιασμού πίνακων:

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(\xi_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(\xi_j) \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $M_n(\mathcal{B}(H)) \rightarrow \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \mapsto A$ που ορίσαμε είναι ισομορφισμός * -άλγεβρων.

6. Αν $f \in L^\infty(K, \mathcal{S}, \mu)$ όπου $(K, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μετρου, ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathcal{B}(L^2(K, \mathcal{S}, \mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2(K, \mathcal{S}, \mu)$ και $(\mu$ -σχεδόν) κάθε $t \in K$.

Δείξτε ότι η π_μ είναι πιστη (δηλ. 1-1) * -αναπαράσταση της C^* άλγεβρας $L^\infty(K, \mathcal{S}, \mu)$.

Καλή επιτυχία!