Ανάλυση I – 19-2-2019

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

2. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m(A \setminus (A+x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $m(A) = 0$ ή $m(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

3. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f_n(x)| > 1/n\}) < \infty$. Αποδείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

4. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ που ικανοποιούν τα εξής: $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\limsup f_n(x) = +\infty$.

5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $f_t(x) = tf(tx)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 1} \|f - f_t\|_1 = 0.$$

6. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < m(E) < \infty$. Έστω $f_n \in L^1(E)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχουν $1 < p < \infty$ και $A > 0$ τέτοια ώστε $\|f_n\|_p \leqslant A$ για κάθε $n \geqslant 1$.

(β) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση f στο E τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Αποδείξτε ότι $f \in L^1(E)$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

7. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *πεπερασμένο* μέτρο ν στον $(X, \mathcal{M})$ τέτοιο ώστε $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.

8. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι η συνέλιξη $f * g$ των f και g είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση.

9. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $f_n \in L^2(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|f_n\|_2 \leqslant M$ για κάθε n, και ότι $f_n \to 0$ κατά μέτρο. Δείξτε ότι

$$\int f_n g \, d\mu \to 0 \quad \text{για κάθε } g \in L^2(\mu).$$

10. Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, μ πεπερασμένο μέτρο στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ του X και $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολικά φραγμένο $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$.

11. Έστω X μη κενό σύνολο και μ^* εξωτερικό μέτρο στο $\mathcal{P}(X)$ με $\mu^*(X) < \infty$. Ορίζουμε

$$\nu^*(E) = \sqrt{\mu^*(E)}$$

για κάθε $E \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το ν^* είναι εξωτερικό μέτρο και ότι ένα υποσύνολο A του X είναι ν^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν είτε $\nu^*(A) = 0$ ή $\nu^*(X \setminus A) = 0$.

12. *Σωστό ή λάθος;* Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f \, dm = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε,

$$\int_{[0,1]} \left(\sup_n f_n\right) dm = 0.$$