Ανάλυση I
Πέμπτη 15 Φεβρουαρίου 2024

Θέμα 1ο. Έστω $(X, \mathcal{F})$ χώρος μέτρου. Ορίστε $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}$ και $\bar{\mathcal{F}} = \{A \cup B : A \in \mathcal{F}$ και υπάρχει $N \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq N\}$.

(i) Δείξτε ότι $\bar{\mathcal{F}}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ μέτρο επέκταση του μ. Δείξτε ότι το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο.

(iii) Έστω $(X, \mathcal{F}', \mu')$ πλήρες μέτρο επέκταση του μ. Δείξτε ότι το μ' επέκταση του $\bar{\mu}$

(iv) Έστω $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ χώρος μέτρου και $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-μετρήσιμη $T : X \to Y$ τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{G}$ με $\nu(A) = 0$ έχουμε $\mu(T^{-1}(A)) = 0$. Δείξτε ότι η T είναι $(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}})$-μετρήσιμη.

Θέμα 2ο. Έστω $(X, \mathcal{F})$ και $(E_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ που ικανοποεί τα επόμενα :

(i) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $E_\alpha \in \mathcal{F}$

(ii) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ έχουμε ότι $E_\alpha \subseteq E_\beta$.

(iii) $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} E_\alpha = X$ και $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} E_\alpha = \varnothing$.

Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $E_\alpha \subseteq \{f \le \alpha\}$ και $E_\alpha^c \subseteq \{f \ge \alpha\}$

Θέμα 3ο. Έστω μετρήσιμοι χώροι $(X, \mathcal{F})$ και $(Y, \mathcal{G})$ και μετρήσιμη $T : X \to Y$.

(i) Έστω το μ μέτρο επί του $(X, \mathcal{F})$ και μ_T το *push forward* μέτρο του μ μέσω του T. Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^1(\mu_T)$ έχουμε ότι

$$\int f \, d\mu_T = \int f \circ T d\mu$$

(ii) Έστω μ, ν σ-πεπερασμένα μέτρα επί του $(X, \mathcal{F})$ τέτοια ώστε $\mu \ll \nu$. Υποθέστε ότι για κάθε $A \in \mathcal{F}$ έχουμε $T^{-1}(T(A)) = A$. Δείξτε ότι :

(α) $\mu_T \ll \nu_T$

(β) $\frac{d\mu_T}{d\nu_T} \circ T = \frac{d\mu}{d\nu}$ ν- σχεδόν παντού.

Θέμα 4ο. Έστω μετρήσιμος χώρος $(X, \mathcal{F})$ και μ, ν πεπερασμένα μέτρα επί του $(X, \mathcal{F})$ τέτοια ώστε $\mu \ll \nu$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in L^1(\nu)$ τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$

Θέμα 5ο. Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \le p < \infty$. Έστω $(f_n)_n$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $g \in L^p(\nu)$ τέτοια ώστε $|f_n| \le g$ για κάθε n. Υποθέστε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Δείξτε ότι $\|f_n - f\|_p \to 0$

Καλή επιτυχία!