Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις
Εξέταση 24 Ιουνίου 2024

Άσκηση 1. (25 βαθμοί) Έστω $(M_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale με $M_0 = 0$ και φραγμένο στον L^2. Δείξτε ότι:

(α) $\sup_{t\geq 0} |M_t| \in L^2$ και $\mathbf{E}(\langle M, M\rangle_\infty) < \infty$.

(β) Η ανέλιξη $(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale.

[Υπόδειξη: Για το δεύτερο μέρος του (α), θεωρήστε τους χρόνους διακοπής $S_n := \inf\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t \geq n\}, n \in \mathbb{N}$, και το local martingale $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$.]

Άσκηση 2. (20 βαθμοί) Έστω $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ διδιάστατη τυπική κίνηση Brown και $(a_t)_{t\geq 0}$ προσαρμοσμένη ανέλιξη με τιμές στο $[-1, 1]$ και συνεχή μονοπάτια. Θεωρούμε την ανέλιξη $(Z_t)_{t\geq 0}$ με

$$Z_t := \int_0^t a_s\, dX_s + \int_0^t \sqrt{1 - a_s^2}\, dY_s \text{ για κάθε } t \geq 0. \tag{1}$$

(α) Να δειχθεί ότι η $(Z_t)_{t\geq 0}$ είναι τυπική κίνηση Brown.

(β) Να προσδιοριστεί η ανέλιξη $(\langle Z, X\rangle_t)_{t\geq 0}$.

Άσκηση 3. (20 βαθμοί) Έστω B τυπική κίνηση Brown, και $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ με

$$X_t := \int_0^t (1 \wedge s^a)\, dB_s \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Να δειχθεί ότι:

(α) Για κάθε $a > -1/2$, με πιθανότητα 1, το όριο $\lim_{t\to\infty} X_t$ δεν υπάρχει αλλά $\lim_{t\to\infty} X_t/t^{2a+1} = 0$.

(β) Για κάθε $a < -1/2$, με πιθανότητα 1, το όριο $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, και να προσδιοριστεί η κατανομή του.

Άσκηση 4. (30 βαθμοί) Έστω $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ διδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Θεωρούμε την ανέλιξη A με

$$A_t := \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

για κάθε $t \geq 0$.

(α) Να υπολογιστεί η τετραγωνική κύμανση $\langle A, A\rangle_t$, της A και να αποδειχθεί ότι η A είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale.

(β) Να δειχθεί ότι η A έχει την ίδια κατανομή με την $-A$.

(γ) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση C^2. Θεωρούμε τα semimartingales

$$Z_t := \cos(\lambda A_t)$$
$$W_t := -\frac{1}{2}(X_t^2 + Y_t^2) f'(t) + f(t)$$

Να δοθεί η κανονική διασπασή τους και να δειχθεί ότι $\langle Z, W\rangle_t = 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Άσκηση 5. (15 βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $a > 0$. Ορίστε μέτρο $\mathbf{Q}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ ώστε η ανέλιξη $X_t := B_t + t^3, t \in [0, a]$ να είναι τυπική κίνηση Brown περιορισμένη στο $[0, a]$.

Σχόλια

Άσκηση 1. Le Gall, Θεώρημα 4.13(i).

Άσκηση 2. (α) Θεώρημα χαρακτηρισμού του Levy.
(β) Χρησιμοποιούμε τη σχέση (5.5) του Le Gall.

$$\langle Z, X\rangle_t = \left\langle \int_0^{\cdot} a_s\, dX_s + \int_0^{\cdot} \sqrt{1-a_s^2}\, dY_s, \int_0^{\cdot} dX_s \right\rangle_t = \dots = \int_0^t a_s ds$$

Άσκηση 3. Θεώρημα Dambis-Dubins-Schwarz. $X_t = \beta_{\langle X,X\rangle_t}$ για κάποια τυπική κίνηση Brown β.

Άσκηση 5. Le Gall, Θεώρημα 4.13(i). Θεωρούμε το martingale $L_t := \int_0^t (-3s^2)\, dB_s$ για κάθε $t \geq 0$. Θέτουμε

$$d\mathbf{Q} := \exp\left(L_a - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_a\right) d\mathbf{P} = \exp\left(-3\int_0^a s^2\, dB_s - \frac{9}{10}a^5\right) d\mathbf{P}$$

Τότε $\langle B, L\rangle_t = -t^3$ για κάθε $t \geq 0$.

Παρατήρηση: Αν ένα local martingale είναι φραγμένο στον L^2, δεν έπεται ότι είναι martingale (η ανισότητα Doob, πρόταση 3.15(ii) στον Le Gall χρειάζεται martingale). Για αντιπαράδειγμα, δείτε την άσκηση 5.33 ερώτημα 8 στον Le Gall με μία διόρθωση, εννοεί $(|B_t|^{-1})_{t\geq 1}$.